ELEMENTA
MATHEMATICA

Digitized by Google

P. F. FORTUNATI
A BRIXIA

Ord. Min. Ref. Prov. Brixiæ Lect. Theol. Scriptoris Ord. & in Brixiana Academia Publ. Matheſeos & naturalis Philoſ. Profeſſoris

ELEMENTA MATHEMATICA

IN QUATUOR TOMOS DIGESTA.

TOMUS QUARTUS

In quo ſectionum conicarum, ſolidorum ex earum revolutione genitorum, ac figurarum iſoperimetrarum ſymptomata demonſtrantur, precipuaque elementaris Geometriæ Problemata reſolvuntur.

BRIXIÆ. CIↃ IↃ CCXXXIX.
Typis JOANNIS-MARIÆ RIZZADRI.
SUPERIORUM FACULTATE.

Digitized by Google

Digitized by Google

INDEX
LIBRORUM
QUI IN HOC QUARTO TOMO EXHIBENTUR

LIBER XV.

De ſectionibus conicis.

LIBER XVI.

De ſimilitudine, proportione, & dimenſione ſectionum conicarum, atque ſolidorum, quæ ex illarum circum axim revolutione generantur.

LIBER XVII.

De figuris iſoperimetris.

LIBER XVIII.

Præcipua elementaris Geometriæ problemata reſolvuntur, & demonſtrantur.

APPRO-

Digitized by Google

APPROBATIONES.

NOs infraſcripti Lectores Theologi, nutibus obtemperantes Reverendiſſimi Patris Felicis a Roma hujus Reformatæ Ciſmontanæ Familiæ V. Commiſſ. Generalis, vidimus Tomum IV. *Elem. Mathematicorum* R. P. Fortunati a Brixia hujus Ref. Prov. Brixiæ Lect. Theol., Scriptoris Ordinis, & in Brixiana Acad. Pub. Matheſeos, & naturalis Philoſophiæ Profeſſoris, nihilque in eo deprehendimus, quod Catholicę fidei contrarium ſit, vel morum doctrinę adverſetur. Propterea dignum illum cenſemus, ut typis evulgetur, dummodo ita iis quoque videatur, ad quos de jure ſpectat. In quor. fidem &c.

Brixię in Conventu Corporis Chriſti die 9. Septembris 1739.

F. Proſper a Brixia S. Theol. Lector.

B. Bonaventura a Brixia ex Provinc. Lect. Theol.

F. FELIX A ROMA STRICT. OBSERV. S. P. N. FRANCISCI, Lect. Emeritus, Sac. Congr. Indicis Conſultor, iterato Proc. Geñlis, & in tota Ciſmontana Reformator. Familia V. Comiſſ. Generalis, & humilis in Domino Servus.

Dilecto Nobis in Chriſto P. F. Fortunato a Brixia Lect. Theol., Script. Ordinis, noſtræ Ref. Prov. Brixiæ Alumno Salutem, & Seraphicam Benedictionem.

CUm juxta Apoſtolicas, noſtrique Ordinis Conſtitutiones liber, cui titulus: *Elementa Mathematica: Tomus Quartus* a te elaboratus ab idoneis Noſtræ Reformationis Cenſoribus, ad id ſpecialiter a Nobis deputatis, recognitus fuerit, & approbatus, Nos præſentium tenore, ac cum ſalutaris obedientiæ merito, tibi facultatem facimus, & impertimur, ut ſervatis aliàs de jure ſervandis, illud typis evulgare poſſis, & valeas.

Dat. Romæ ex noſtro Conventu S. Franciſci ad ripas Tyberis die 26. Septembris 1739.

F. FELIX A ROMA V. Com. Gen.

L. ✠ S.

Reg. Stab. Brix.

De mandato P. S. Rm̃æ

F. Joannes Pius a Preſſano Secr. Gen.

NOI

NOI RIFORMATOR
DELLO STUDIO DI PADOVA.

AVendo veduto per la Fede di Reviſione, ed Approvazione del P. F. Tommaſo-Maria de Angelis Inquiſitore di Breſcia, nel Libro intitolato: *P. F. Fortunati a Brixia Ord. Min. Ref. Provinciæ Brixiæ, Elementa Mathematica Tomus Quartus;* non v' eſſer coſa alcuna contro la Santa Fede Cattolica, e parimente per Atteſtato del Segretario Noſtro, niente contro Principi, e buoni coſtumi, concedemo Licenza a Gian-Maria Rizzardi Stampatore in Breſcia, che poſſi eſſer ſtampato; oſſervando gli ordini in materia di Stampe, e preſentando le ſolite Copie alle Pubbliche Librarie di Venezia, e di Padova.

Dat. 17. Agoſto 1739.

[
[*Lorenzo Tiepolo Kav. Rif.*
[*Daniel Bragadin Kav. Proc. Rif.*

Reg. in lib. a c. 17.

Agoſtino Gadaldini Segret.

SPHAL-

Digitized by Google

Elementorum Lib. XV.

§. 94. l. 5. *dem.*	rectæ MF	rectę NF
§. 111. n. 6. l. 3.	BL	*b*L
Ibid. l. 4, & 9.	BA	*b*A
§. 170. l. 14. *dem.*	H*nd*A	HN*d*A
§ 231. l. 4.	rectæ N*a*, *ea*	NA, *ea*
§ 242. l. 8. *dem.*	triangulum DHF	DHE
§. 246. *in marg.*	Fig. 4. Tab. XVI.	Fig. 3. T. XVI.
§. 266. l. 17. *dem.*	O*a* erunt	O*b* erunt
§. 274. l. 4.	DE	AE
§. 286. l. 3.	Patet ex §.	Patet ex §. 280.

Elementorum Lib. XVI.

§. 19. l. 4.	ſemiaxim BF	ſemiaxim BP
§. 35. l. 4.	proportionalem *ad*	proportionalem *bd*
§. 36. l. 4.	∺ AC. *be*. BD.	∺ AC. *bd*. BD
Ad calcem pag. 175.	(b) Lib. IX. §. 155.	(b) §§. 33. 34.
pag. 179.	(f) Lib. XV. §. 56.	(f) Lib. XV. §. 59.
pag. 194.	(e) §. 55.	(e) §. 49.
pag. 195.	(e) §. 56.	(e) §. 53.
pag. 197.	(a) §. 53.	(a) §. 56.
pag. 199.	(b) §. 95. (c) Ibid.	(b) §. 89. (c) §. 95.
pag. 203.	(a) §. 6.	(a) §. 1.
§. 123. l. 3. *dem.*	baſi *bCx*	baſi *bCz*
§. 152. l. 18. *dem.*	HL, HB	HL, DB
§. 189. l. 10.	Cylindrus quoque BBXGE	BBXGF

Elementorum Lib. XVII.

§. 11. l. 11. *dem.*	CA*B* ad latus AC	ad latus *AB*
§. 19. l. 13. *dem.*	recta *a*	recta *e*

Elementorum Lib. XVIII.

§. 10. l. 5.	junctique punctis	junctiſque punctis
§. 44. l. 25.	rectaque idcirco DA	DB
§. 70.	Fig. 10. Fig. 33.	Fig. 30. Fig. 31.

ELE-

Digitized by Google

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER XV.

De ſectionibus conicis.

QUam difficilis ſit *ſectionum conicarum* doctrina, & quantum Tyronibus negotii faceſſat, id ex eo vel maxime patere puto, quod *Geometria ſublimior* ipſa jam vulgo appellari ſoleat. Hanc propterea explanaturus, curavi, ut non ſolum brevius, verum etiam clarius, quo fieri a me poterat, id præſtarem. Totum idcirco librum in quatuor capita partitus ſum, in quorum primo nonnulla exhibeo, quæ ſectiones ipſas *generatim* ſumtas reſpiciunt; in ſecundo *ellipſeos*, in tertio *parabolæ*, & in quarto *hyperbolæ* ſymptomata præcipua demonſtro.

CAPUT PRIMUM.

Præmittuntur nonnulla ſpectantia ad ſectiones conicas in genere.

DEFINITIO I.

1. *SEctiones conicæ ſunt figuræ planæ, quæ in plano conum ſecante vel a curva tantum coni ſuperficie, vel ab ipſa cur-*

va ſuperficie, atque ſimul a circulo baſeos determinantur. Ut
Fig. 1. T. XIII. ſi conus BAC ſecetur plano FG, figura *ab* conica ſectio nuncupatur.

SCHOLION I.

2. Quinque modis conus ſecari poteſt. Conus namque
Fig. 1. BAC poteſt ſecari *primo* plano DE per verticem A ad baſim BC traductо, atque hujuſmodi ſectio eſt triangulum planum rectilineum BAC (a). *Secundo* plano FG circulo baſeos BC parallelo, & ſectio *ab*, quæ hinc emergit, eſt circu-
Fig. 2. lus (b). *Tertio* plano GH, quod neque parallelum ſit circulo baſis BC, neque ipſi baſi occurrat, ſitque ſectio *ab*. *Quarto*
Fig. 3. plano GD, quod ita conum diſpeſcit, ut uni laterum AC ipſius coni ſit parallelum, & per circulum baſis tranſeat, & hinc habetur ſectio DEF. *Poſtremo* plano ED, quod
Fig. 4. T. XIII. tranſeat per coni baſim BC, ſimulque occurrat cum uno ipſius coni latere CA directe apicem verſus producto, ſitque ſectio *abc*. Verum ex his quinque ſectionibus tres dumtaxat poſtremæ conſiderantur, & ſub nomine *ſectionum conicarum* ipſæ tantummodo veniunt. Prima namque, & ſecunda, *triangulum* ſcilicet *planum rectilineum*, atque *circulus*, independenter omnino a cono ſpectari poſſunt, & debent, optimoque jure ab omnibus, nulla habita ratione ad conum, ſpectantur. Quippe ſi ſecus, cum, ut ex alibi traditis aperte conſtat, notio trianguli, & circuli ad coni notionem neceſſario prærequiratur, in eam profecto labem impingeremus, quæ *vitioſus circulus* vulgo dicitur.

SCHOLION II.

3. Sectiones in cono *recto* ſpectavimus, eaſque deinceps quoque in eodem dumtaxat cono expendemus. Si autem in cono *ſcaleno* eas conſiderare quis velit, animadvertat neceſſe eſt, non eam tantum hujus coni ſectionem eſſe circulum, quæ fit plano baſi parallelo, verum etiam illam, quæ

(a) Lib. XI. §. 91. (b) Ibidem §. 91.

Digitized by Google

quæ plano ſubcontrarie poſito perficitur. Illa porro ſectio coni ſcaleni BAC dicitur *ſubcontraria*, quæ fit tali lege, ut in triangulo BAC per coni axim trajecto recta DE, communis nimirum ſectio trianguli BAC, & plani conum ſecantis, conſtituat triangulum DAE ſimile quidem triangulo BAC, ſed ſubcontrarie poſitum, videlicet habens angulum AED æqualem angulo ABC, & angulum ADE angulo ACB. Hanc autem coni ſectionem DE eſſe circulum, ex eo oſtenditur, quod ſectio DE non ſit diverſa a ſectione FG baſi BC paralleſa, ſed illi congruat, ſi invertatur, nimirum ſi ponatur latus AE trianguli ADE ſuper latus AF trianguli AFG, & latus AD ſuper latus AG. Fig. 5. T. XIII.

DEFINITIO II.

4. *Curvæ conicæ dicuntur illæ lineæ curvæ, quibus conicæ ſectiones terminantur*. Tres idcirco ſunt curvæ conicæ, quemadmodum tres ſunt coni ſectiones.

LEMMA I.

Recta linea uni duarum rectarum parallelarum non in eodem plano cum illa exiſtentium parallela, alteri quoque earundem eſt parallela.

5. Sint duæ rectæ parallelæ AB, CD, quarum uni CD parallela ſit recta EF in diverſo plano exiſtens. Dico, rectam EF alteri quoque AB eſſe parallelam.

Demonſtratio.

Quoniam duæ AB, CD ſunt parallelæ, ſi in illas incidat recta *ab*, quæ ſit uni AB perpendicularis, alteri quoque CD erit perpendicularis (a). Eadem ratione, ſi per punctum *b* ducatur recta *bc* ad perpendiculum incumbens rectæ CD, Fig. 6. T. XIII

 ipſa

(a) Lib. IV. §. 16.

ipſa *bc* rectæ quoque EF ad perpendiculum inſiſtet. Duæ autem *ab*, *cb* ſunt in eodem plano (a). Ergo eidem plano perpendiculares erunt rectæ AB, EF; atque propterea duæ AB, EF erunt inter ſe parallelæ (b). Itaque recta &c. quod erat oſtendendum.

LEMMA II.

Recta linea ducta a vertice coni per punctum ſumtum in illius ſuperficie ad peripheriam circuli baſeos, tota in ipſa jacet ſuperficie.

Fig. 7. T. XIII. 6. A vertice A coni BAC per punctum *a* ſumtum in illius ſuperficie ducatur ad peripheriam circuli baſeos BHC recta A*c*. Dico, rectam A*c* jacere totam in ipſa coni ſuperficie.

Demonſtratio.

Etenim rectæ A*c* congruit illa recta linea, ex qua, dum circa peripheriam BHC revolvitur, immoto exiſtente altero illius extremo in vertice A, curva coni ſuperficies producitur. Quippe, ſi ſecus, duæ rectæ lineæ ſpatium clauderent, quod repugnat (c). Ergo recta A*c* jacet tota in curva coni BAC ſuperficie; adeoque recta &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA I.

In omni conica ſectione poteſt duci recta linea, quæ omnes rectas eidem rectæ in ipſo ſectionis plano parallelas biſariam dividat.

7. Spectetur conica ſectio *a*E*b*M, in cujus plano recta EM ſit communis ſectio trianguli BAC per coni axim tranſeuntis, & ipſius plani *a*E*b*M. Recta autem BC ſit diameter circuli

(a) Lib VIII. §. 11. (b) Ibidem §. 20.
(c) Lib. IV. §. 7.

Digitized by Google

culi baſeos, adeoque baſis trianguli BAC, atque ad rectos angulos recta BC dividat chordam HF in G. Planum vero ſectionis *a*E*b*M ita ſe habeat in cono, ut recta *ab* ducta in ipſo plano ſit rectæ HF parallela. Dico, rectam *ab* dividi bifariam in puncto *e* a recta EM. Fig. 7. Fig. 8. T. XII.

Demonſtratio.

A vertice A coni per extrema puncta *a*, *b* rectæ *ab* ducantur ad peripheriam circuli baſeos BHC rectæ A*c*, A*d*, quæ totæ erunt in curva ipſius coni ſuperficie (a), & jungantur puncta *c*, *d* recta *cd*, conſtituaturque propterea triangulum planum rectilineum *c*A*d*, cujus ſectio facta a plano trianguli BAC ſit recta A*m*. Quoniam igitur recta *ab* poſita eſt parallela rectæ HF in plano circuli baſeos exiſtenti, ſpectari poteſt veluti ſectio plani *xy* (exprimitur recta linea, vitandæ confuſionis gratia) paralleli circulo baſis BHC determinata a plano *c*A*d*. Ab hoc eodem autem plano ſecatur etiam planum BHC, ejuſque ſectio eſt recta *cd*. Ergo rectæ *ab*, *cd*, utpote ſectiones planorum parallelorum, erunt parallelæ (b). Recta autem *ab* poſita eſt parallela rectæ HF. Ergo eidem rectæ HF parallela erit etiam recta *cd* (c); ac proinde angulus B*mc* erit rectus, utpote recto BGH æqualis (d), ipſaque recta *cd* bifariam diviſa erit a diametro BC (e), erit nempe *cm*=*md*. Manifeſtum porro eſt, eſſe *cm*.*ae*=*md*.*eb*; cum ſit *cm*.*ae*=A*m*.A*e*, ſicuti etiam *md*.*eb*=A*m*.A*e* (f). Ergo erit quoque *ae*=*eb* (g). Eodem modo oſtendam, omnes rectas in plano conicæ ſectionis *a*E*b*M parallelas eidem rectæ *ab* bifariam dividi a recta EM; cum omnes hujuſmodi rectæ ſint eidem HF parallelæ. Itaque in omni &c. quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) §. 6.
(b) Lib. VIII. §. 26.
(c) §. 5.
(d) Lib. IV. §. 14.
(e) Lib. VII. § 39.
(f) Lib. IX. §. 59.
(g) Lib. I. §. 128.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

In omni ſectione conica poteſt duci recta linea, quæ omnes rectas eidem rectæ parallelas non ſolum biſariam, verum etiam ad angulos rectos dividat.

8. Quandoquidem, iiſdem poſitis, ſi recta *ae* fuerit perpendicularis plano trianguli BAC, recta *ab* non tantum bi- Fig. 7. Fig. 8. T. XIII. ſariam, ſed etiam ad angulos rectos ſecabitur a recta EM, & eadem ratione omnes aliæ in eodem plano *a*E*b*M eidem rectæ *ab* parallelæ biſariam ab ipſa EM dividentur. Cum enim recta EM ſit in plano trianguli BAC, angulus *ae*E erit rectus(a); & ideo recti erunt etiam anguli *ae*M, M*eb*, *be*E (b); adeoque &c.

SCHOLION.

9. Recta *ae* perpendicularis erit plano trianguli BAC; quotieſcunque planum ipſius trianguli circulo baſeos BHC ad perpendiculum inſtiterit.

COROLLARIUM II.

In omni ſectione conica, ſi conus fuerit rectus, communis ſectio plani ſecantis, & trianguli per axim dividit biſariam, atque ad rectos angulos omnes rectas eidem rectæ parallelas.

10. Id enim oſtenſum eſt de recta EM, quæ in cono recto BAC eſt communis ſectio plani ſecantis *a*E*b*M, & trianguli BAC per axim.

DEFINITIO III.

11. *Diameter conicæ ſectionis eſt recta linea omnes rectas eidem*

(a) Lib. VIII §. 2. (b) Lib. III. §. 52.

dem rectæ, quam biſariam ſecat, in ipſo plano parallelas biſariam dividens. Ut ſi recta AB in conica ſectione ABD biſariam diviſerit rectas *ab*, *ed*, omneſque alias eidem rectæ *xy*, quam dividit biſariam, parallelas, erit diameter conicæ ſectionis ABD. Fig. 8. T. XIII.

DEFINITIO IV.

12. *Axis conicæ ſectionis eſt illa recta linea, quæ non biſariam tantum, verum etiam ad angulos rectos dividit omnes rectas eidem rectæ ab ipſa biſariam ſectæ in eodem plano parallelas.* Sic recta AB erit axis conicæ ſectionis ACBD, ſi non ſolum biſariam, ſed etiam ad rectos angulos diviſerit rectas *ed*, CD, *ab*, omneſque alias eidem rectæ *pz*, biſariam, atque ad angulos rectos ab ipſa AB diviſæ, parallelas. Fig. 10. T. XIII.

COROLLARIUM I.

13. *Axis conicæ ſectionis deſumtæ ex cono recto eſt illa recta linea, quæ eſt communis ſectio plani ſectionis, & trianguli per axim.* Hæc enim dividit biſariam, atque ad rectos angulos omnes rectas eidem rectæ parallelas (a).

COROLLARIUM II.

14. *Axis ſectionis conicæ eſt etiam illius diameter, ſed non omnis diameter eſt axis.* Quandoquidem axis biſariam dividit omnes rectas eidem rectæ parallelas, prout exigit diameter. At vero non quævis diameter dividit eaſdem rectas ad angulos rectos, prout poſtulat axis.

SCHOLION.

15. Axis ſectionis conicæ dicitur abſolute illius *diameter*, vel *diameter primaria*. Illæ vero diametri, quarum nulla eſt axis, *diametri ſecundariæ* nuncupantur.

DE-

(a) §. 10.

Digitized by Google

DEFINITIO V.

16. *Vertex conicæ ſectionis eſt punctum extremum axis.* Ut ſi
Fig. 10. T. XIII. recta AB fuerit axis conicæ ſectionis ACBD, punctum illius extremum A erit vertex ipſius ſectionis. Punctum vero extremum diametri *vertex diametri* vocatur.

DEFINITIO VI.

17. *Ordinatim diametro applicata dicitur quælibet illarum rectarum parallelarum, quæ ab ipſa diametro biſariam dividuntur.*
Fig. 9. T. XIII. Sic quælibet rectarum parallelarum *ab*, *ed*, *xy*, quæ biſariam ſecantur a diametro AB, dicitur *ordinatim* ipſi diametro *applicata*. Earum vero pars dimidia, ut *mb*, *nd*, *zy*, *ſemiordinata* ad ipſam diametrum vocari ſolet. Plerique tamen nomine *ordinatim* diametro *applicatæ* partem ipſam dimidiam intelligunt.

DEFINITIO VII.

18. *Abſciſſæ*, quæ etiam *ſagittæ* appellari ſolent, *dicuntur illæ diametri portiones, quæ inter diametri verticem, & rectas ordinatim ipſi diametro applicatas continentur*. Hujuſmodi ſunt
Fig. 10. T. XIII. portiones A*m*, A*x*, A*n* diametri AB, videlicet portio A*m* dicitur *abſciſſa* correſpondens ordinatæ *ab*; portio A*x* *abſciſſa* correſpondens ordinatæ CD, & ſic deinceps.

DEFINITIO VIII.

19. *Recta conicam ſectionem tangens vocatur illa, quæ habet commune punctum cum ea curva, qua ſectio ipſa continetur, ſed reliqua omnia illius puncta extra ipſam curvam reperiuntur; ac proinde tota extra conicam ſectionem cadit.* Sic re-
Fig. 9. T. XIII. cta AE dicitur tangere conicam ſectionem ABD in puncto A; quia punctum A dumtaxat eſt commune rectæ AE, & cur-

Digitized by Google

væ ABD, quâ ipſa ſectio terminatur, adeo nimirum ut reliqua omnia puncta ipſius rectæ AE extra illam curvam reperiantur.

DEFINITIO IX.

20. *Focus, ſive umbilicus ſectionis conicæ dicitur illud axis punctum, in quo omnes luminis radii, qui in curvam, qua ſectio terminatur, ex data parte incidunt, poſt reflexionem ſimul uniuntur.*

THEOREMA II.

Recta linea ducta per extremum diametri conicæ ſectionis parallela ordinatim applicatis ad ipſam diametrum, conicam ipſam ſectionem tangit. Et viciſſim recta tangens ſectionem conicam ducta per punctum extremum diametri eſt parallela ordinatim ad ipſam diametrum applicatis.

I.

21. Per extremum punctum A diametri AB conicæ ſectionis ABD ducatur recta AE parallela ordinatis *ab*, *ed* ad ipſam diametrum. Dico, rectam AE tangere conicam ſectionem in puncto A. Apoll. l. 1. p. 17

Demonſtratio.

Si namque fieri poteſt, recta AE ſecet conicam ipſam ſectionem, quemadmodum recta AF. Cum igitur recta AE, ſive AF ſit parallela ordinatis *ab*, *ed* ad diametrum AB, atque intra conicam ſectionem cadat, ipſa quoque erit una ex ordinatis ad diametrum AB; ac proinde ab ipſa diametro AB bifariam dividetur (a). Ergo recta AE non attingit Fig. 9. T. XIII.

(a) §. 17.

Digitized by Google

diametrum AB in puncto illius extremo A contra hypotheſim. Itaque recta AE non ſecat, ſed tangit conicam ſectionem in puncto A.

II.

22. Viciſſim recta AE ducta per extremum diametri AB tangat conicam ſectionem in puncto A. Dico, rectam AE eſſe parallelam ordinatis *ab*, *ed* ad ipſam diametrum AB.

Demonſtratio.

Quandoquidem, ſi recta AE non eſt parallela ordinatis *ab*, *ed*, educatur ex puncto contactus A recta AG ipſis ordinatis parallela. Igitur recta AG erit ſimul tangens, & non tangens conicam ſectionem ABD. Erit namque tangens ex eo, quod ſit ordinatis *ab*, *ed* parallela (a). Non erit vero tangens; cum ex hypotheſi tangens ſit recta AE. Cum igitur fieri nequeat, ut recta AG ſimul tangat, & non tangat conicam ſectionem ABD, remanet, rectam AE, quæ tangit conicam ſectionem ABD in vertice diametri AB, eſſe parallelam ordinatis *ab*, *ed* ad ipſam diametrum. Itaque recta &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Quævis diameter conicæ ſectionis bifariam dividit omnes rectas parallelas rectæ tangenti ductæ per extremum punctum ipſius diametri.

23. Ut ſi recta AB fuerit diameter conicæ ſectionis ABD, per cujus diametri extremum punctum A ducatur tangens AE, cui parallelæ ſint rectæ *ab*, *ed*, *xy*, diameter AB bifariam dividet ipſas rectas *ab*, *ed*, *xy*. Cum enim recta AE ſit parallela ordinatim applicatis ad diametrum AB (b), rectæ

(a) §. 21. (b) §. 22.

Digitized by Google

ctæ *ab*, *ed*, *xy*, quibus ipſa AE eſt parallela, erunt diametro AB ordinatim applicatæ. Igitur diameter AB biſariam ipſas dividet (a).

COROLLARIUM II.

Recta tangens conicam ſectionem, ſi ex vertice axis ducta fuerit, erit ipſi axi perpendicularis.

24. Videlicet recta AE ducta ex vertice A axis AB conicæ ſectionis ACBD, ipſamque ſectionem tangens, erit ipſi axi AB perpendicularis. Quippe cum ſit parallela ordinatæ *ab* (b), & angulus A*mb* ſit rectus (c), rectus quoque erit angulus EA*m* (d); ac proinde recta AE rectæ AB ad perpendiculum incumbit (e). Fig. 10. T. XIII.

CAPUT SECUNDUM.

De Ellipſi.

DEFINITIO I.

25. E*Llipſis dicitur illa ſectio coni, quæ fit plano baſi minime parallelo, neque ſubcontrarie poſito, neque illi occurrente;* ac proinde *cujus axis dividit duo latera trianguli per coni axim tranſeuntis, & ſi extra conum axis ipſe producatur, concurrit cum baſi ipſius trianguli extra conum itidem producta, quin auferat triangulum ſimile triangulo per axim, quomodocunque ſumatur.* Talis itaque eſt ſectio E*a*M*b* coni BAC. Ejus quippe axis EM ſecat duo latera AB, AC trianguli BAC per axim, & cum altero latere BC, ſi utrumque extra conum producatur, concurrit in puncto N, quin triangulum EMA ſit ſimile triangulo BAC, propterea quod planum, Fig. 8. T. XIII.

 quo

(a) §. 17.
(b) §. 22.
(c) §. 12.
(d) Lib. IV. §. 13.
(e) Lib III. §. 24.

Digitized by Google

quo ſectio ipſa perficitur, parallelum non ſit baſi, neque ſubcontrarie poſitum, neque illi occurrens. Hæc porro ellipſeos definitio mere nominalis eſt, atque nullam plane ellipſis proprietatem deſignans.

COROLLARIUM I.

26. *Curva elliptica in orbem redit, ſeu ellipſis una tantum curva linea in ſe redeunte, quemadmodum circulus, cui affinis eſt, undique terminatur.*

COROLLARIUM II.

27. *Hinc duo ſunt vertices ellipſis:* Illius quippe axis in duobus punctis occurrit curvæ, qua ellipſis comprehenditur.

DEFINITIO II.

28. *Centrum ellipſis eſt punctum, in quo axis bifariam dividitur.* Ut ſi axis AB ellipſis ACBD dividatur bifariam in
Fig. 10. T. XIII. puncto *x*, punctum *x* erit centrum ipſius ellipſis. Dicitur autem *centrum*; quia omnes rectæ per illud tranſeuntes, & utrinque ad curvam ellipticam terminatæ, bifariam in illo, ut patebit, dividuntur.

DEFINITIO III.

29. *Conjugatæ diametri ellipſeos dicuntur duæ qualibet diametri ita ſe habentes, ut utraque bifariam dividat omnes rectas earum alteri parallelas.* Ut ſi diameter AB ellipſis ABD
Fig. 9. T. XIII. bifariam diviſerit omnes rectas *ab*, *xy* &c. parallelas diametro *ed*, & diameter *ed* ſecuerit itidem bifariam rectas *ru*, *fg*, omneſque alias parallelas diametro AB, duæ hujuſmodi diametri AB, *ed* erunt *diametri conjugatæ* ellipſis ABD.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

30. *Rectæ parallelæ uni diametro ellipſeos ſunt ordinatæ ad diametrum illi conjugatam*. Videlicet rectæ *ru*, *fg* parallelæ diametro AB ellipſis A*e*D ſunt *ordinatim applicatæ* diametro *de* priori AB conjugatæ. Cum enim diametri AB, *de* ſint *conjugatæ* per hypotheſim, diameter *de* biſariam dividet rectas *ru*, *fg*. Ergo rectæ *ru*, *fg* erunt *ordinatim* diametro *de applicatæ* (a).

DEFINITIO IV.

31. *Axes conjugati ellipſeos ſunt diametri conjugatæ ſe invicem ſecantes ad angulos rectos*. Ut ſi diametri conjugatæ AB, CD in ellipſi ACBD ſeſe mutuo ad angulos rectos ſecuerint, erunt *axes conjugati* ipſius ellipſis. Fig. 10. T. XIII.

COROLLARIUM I.

32. *Axis ellipſeos dividit biſariam, atque ad angulos rectos omnes rectas parallelas axi ſibi conjugato*. Si nimirum rectæ AB, CD fuerint *axes conjugati* ellipſeos ACBD, axis AB biſariam, & ad rectos angulos dividet rectas *ed*, *pz* parallelas axi CD. Eas namque dividit biſariam; quia rectæ AB, CD ſunt *diametri conjugatæ*. Dividit autem ad angulos rectos; quia, ſtante paralleliſmo rectarum *ed*, *pz* cum axe CD, angulus D*xn* non poteſt eſſe rectus, quin rectus itidem ſit tum angulus *xnd*, tum angulus *xyz* (b); ac proinde quin ipſæ rectæ *ed*, *pz* ab axe AB ad rectos angulos dividantur (c).

COROLLARIUM II.

33. *Rectæ parallelæ axi ellipſeos ſunt ordinatim applicatæ axi,* qui

(a) §. 17. (b) Lib. IV. §. 23. (c) Lib. III. §. 52.

qui eſt illi conjugatus. Axes ſiquidem conjugati a conjugatis diametris ſeſe mutuo ad rectos angulos ſecantibus non differunt; propterea ſicuti rectæ parallelæ uni diametro ellipſis ſunt *ordinatæ* ad diametrum conjugatam (a), idipſum de parallelis uni axi dicendum eſt, ſi ad conjugatum axem referantur.

L E M M A I.

In circulo quadrata ſemiordinatarum ad diametrum ſunt æqualia rectangulis ſub correſpondentibus portionibus ipſius diametri comprehenſis.

34. In circulo A*m*B*n* rectæ *bd*, *mn* ſint ordinatæ ad diametrum AB, videlicet biſariam ab ipſa diametro diviſæ. Dico, quadratum ſemiordinatæ *ad* æquare rectangulum ex A*a* in *a*B, ſicuti etiam quadratum ſemiordinatæ *en* æquare rectangulum ex A*e* in *e*B.

Fig. 11. T. XIII.

Demonſtratio.

Quoniam rectæ *bd*, *mn* biſariam dividuntur a diametro AB, diviſæ erunt ad angulos rectos (b); ac proinde tam ſemiordinata *ad*, quam ſemiordinata *en* erit diametro AB perpendicularis (c). Igitur quadratum rectæ *ad* æquabit rectangulum ex A*a* in *a*B, & quadratum rectæ *en* æquabit rectangulum ex A*e* in *e*B (d). Itaque in circulo &c. quod erat oſtendendum.

S C H O L I O N.

35. Quoniam in circulo non poteſt diameter biſariam dividere rectam, niſi eam dividat ad angulos rectos (e), diameter circuli ſpectari poteſt, veluti ipſius axis.

CO-

(a) §. 30.
(b) Lib. VII. §. 41.
(c) Lib. III. §. 24.
(d) Lib. IX. §. 118.
(e) Lib. VII. §. 41.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

36. *In circulo quadrata ſemiordinatarum ad diametrum, ſive ad axim, ſunt directe inter ſe, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis.* Nimirum quadratum ſemiordinatæ *ad* in circulo A*m*B*n* eſt ad quadratum ſemiordinatæ *en*, ut rectangulum ex A*a* in *a*B ad rectangulum ex A*e* in *e*B. Quippe, cum quadratum rectæ *ad* adæquet rectangulum ex A*a* in *a*B, & quadratum ſemiordinatæ *en* ſit æquale rectangulo ex A*e* in *e*B, quadratum rectæ *ad* erit ad rectangulum ex A*a* in *a*B, ut quadratum rectæ *en* ad rectangulum ex A*e* in *e*B. Ergo, *alternando*, quadratum rectæ *ad* erit ad quadratum rectæ *en*, ut rectangulum ex A*a* in *a*B ad rectangulum ex A*e* in *e*B (a).

COROLLARIUM II.

37. Hinc circulus definiri poteſt: *Figura plana unica curva linea undique terminata, in qua rectarum ſemiordinatarum ad axim quadrata ſunt directe inter ſe, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis, atque illis inſuper ſunt æqualia.*

THEOREMA I.

In ellipſi quadrata ſemiordinatarum ad axim ſunt directe inter ſe, ut rectangula ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis, ſumtis ab utroque vertice, comprehenſa; illis tamen non ſunt æqualia.

In cono recto BAC, qui ſectus ſit triangulo BAC per axim, ſpectetur ſectio elliptica D*d*E, cujus axis ſit recta DE, communis nimirum ſectio plani elliptici, & trianguli per axim. Rectæ autem *ac*, *bd* parallelæ uni rectæ GF ductæ Fig. 12. T. XIII.
in

(a) Lib. I. §. 125.

Digitized by Google

in circulo baſeos BGC, ejuſque diametro BC ad perpendiculum inſiſtenti, ſint ſemiordinatæ ad ipſum axim DE,

I.

Apoll. l.1.p.21. 38. Dico primo, quadratum ſemiordinatæ *ac* eſſe ad quadratum ſemiordinatæ *bd*, ut eſt rectangulum ex D*a* in *a*E ad rectangulum ex D*b* in *b*E.

Demonſtratio.

Per puncta *a*, *b* in eodem plano trianguli BAC per axim ducantur rectæ *ef*, *mn* parallelæ diametro BC baſeos coni. Et quoniam rectæ *ac*, *bd* poſitæ ſunt parallelæ eidem rectæ FG in plano circuli baſeos exiſtenti, planum *ecf*, in quo ſint duæ *ef*, *ac*, ſicuti etiam planum *mdn*, in quo ſint duæ *mn*, *bd*, erunt circulo baſeos BGC parallela; ac proinde ſectiones *ecf*, *mdn* erunt circuli (a), quorum diametri erunt rectæ *ef*, *mn*, ipſiſque ad perpendiculum inſiſtent rectæ *ca*, *db*, quemadmodum recta FG illis parallela perpendiculariter incumbit diametro BC poſitæ in eodem cum illis plano BAC; conſtat enim, eandem eſſe inclinationem tum plani tranſeuntis per rectas *ca*, GF, tum plani trajecti per rectas *db*, GF, ad planum BAC (b). Cum igitur quadratum rectæ *ac* ſit æquale rectangulo ex portionibus *ea*, *af* diametri *ef* circuli *ecf*, & quadratum rectæ *bd* adæquet rectangulum, quod ſub ſegmentis *mb*, *bn* diametri *mn* circuli *mdn* comprehenditur (c), quadratum rectæ *ac* erit ad quadratum rectæ *bd*, ut eſt rectangulum ex *ea* in *af* ad rectangulum ex *mb* in *bn*. Rectangulum autem ex *ea* in *af* eſt ad rectangulum ex *mb* in *bn* in ratione compoſita ex ratione rectæ *ea* ad rectam *mb*, & ex ratione rectæ *af* ad rectam *bn*, videlicet baſium, & altitudinum (d). Ergo etiam quadratum rectæ *ac* erit ad quadratum rectæ *bd* in ratione compoſita ex ra-

(a) Lib. XI. §. 91.
(b) Lib. VIII. §. 29.
(c) Lib. IX. §. 113.
(d) Ibid. §. 105.

Digitized by Google

ratione rectæ *ea* ad rectam *mb*, & ex ratione rectæ *af* ad rectam *bn*. Conſtat porro, eſſe D*a*.D*b*=*ea*.*mb*, ſicuti etiam E*a*.E*b*=*af*.*bn* (a); cum in triangulo *m*D*b* recta *ea* ſit parallela rectæ *mb*, & in triangulo *a*E*f* recta *bn* ſit parallela rectæ *af* (b). Ergo quadratum rectæ *ac* erit quoque ad quadratum rectæ *bd* in ratione compoſita ex ratione rectæ D*a* ad rectam D*b*, & ex ratione rectæ E*a* ad rectam E*b*. Manifeſtum eſt autem, rectangulum ex D*a* in *a*E eſſe ad rectangulum ex D*b* in *b*E in ratione compoſita ex ratione rectæ D*a* ad rectam D*b*, & ex ratione rectæ *a*E ad rectam E*b* (c), ſpectando nempe rectas D*a*, D*b*, veluti eorum baſes, & rectas *a*E, E*b*, veluti eorum altitudines. Ergo quadratum rectæ *ac* erit ad quadratum rectæ *bd*, ut eſt rectangulum ex D*a* in *a*E ad rectangulum ex D*b* in *b*E.

I I.

39. Dico 2. quadratum ſemiordinatæ *ca* non eſſe æquale rectangulo ex D*a*, in *a*E, ſicuti nec quadratum ſemiordinatæ *db* rectangulo ex D*b* in *b*E.

Demonſtratio.

Quandoquidem, ſi quadrata ſemiordinatarum ad axim in ellipſi eſſent non tantum, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis, verum etiam illis æqualia, ellipſis non diſtingueretur a circulo (d). Id autem aperte falſum eſt. Ergo in ellipſi quadrata ſemiordinatarum ad axim non adæquant rectangula, quæ ſub correſpondentibus ipſius axis portionibus continentur. Itaque in ellipſi &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

40. Definiri idcirco poteſt ellipſis, nulla plane habita ratio-

(a) Lib. IX. §. 59. (b) Lib. VIII. §. 26. (c) Lib. IX. §. 105. (d) §. 37.

Digitized by Google

tione coni, ex quo illa educitur: *Figura plana unica curva linea undique terminata, in qua rectarum ad axim ſemiordinatarum quadrata ſunt directe inter ſe, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus portionibus axis; illis tamen non ſunt æqualia.* Hac enim ratione explicatur natura ellipſeos, tum prout convenit cum circulo, cui quammaxime affinis eſt, tum prout a circulo diſtinguitur. Convenit quippe ellipſis cum circulo, quatenus in utraque figura quadrata ſemiordinatarum ad axim ſunt, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus portionibus axis continentur. Differt vero ellipſis a circulo, quatenus in ellipſi quadrata ſemiordinatarum ad axim, ut in circulo accidit, illis rectangulis non ſunt æqualia.

COROLLARIUM II.

In ellipſi recta tranſiens per centrum, ejuſque axim ad angulos rectos dividens, eſt ipſi axi inæqualis.

41. Recta nimirum CD tranſiens per centrum *x* ellipſeos ACBD, ejuſque axim AB ad angulos rectos dividens, non eſt æqualis ipſi axi AB. Cum enim recta CD, utpote ad axim AB ordinata (a), bifariam ab illo dividatur, eſſet *x*D=*x*A; cumque ſit etiam *x*A=*x*B (b), quadratum ſemiordinatæ *x*D æquaret quadratum rectæ *x*A, ſive rectangulum ex A*x* in *x*B (c). Id autem repugnat ellipſi (d). Ergo &c.

Fig. 10. T. XIII.

COROLLARIUM III.

Etiam quadrata ordinatarum ad axim in ellipſi ſunt directe inter ſe, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus portionibus axis.

42. Ut ſi rectæ *ab*, CD ſint ordinatæ ad axim AB ellipſis

(a) §. 17.
(b) §. 28.
(c) Lib. I. §. 187.
(d) §. 40.

Digitized by Google

ſis ACBD, quadratum ordinatæ *ab* erit ad quadratum ordinatæ CD, ut eſt rectangulum ex A*m* in *m*B ad rectangulum ex A*x* in *x*B. Etenim cum ſit *ab* = 2*mb*, & CD = 2*x*D, erit *ab*. CD = *mb*. *x*D (a); ac proinde quadrata rectarum *ab*, CD erunt inter ſe, ut quadrata rectarum *mb*, *x*D (b). Quadrata autem rectarum *mb*, *x*D ſunt inter ſe, ut rectangula A*m* × *m*B, A*x* × *x*B (c). Ergo, ut ipſa eadem rectangula, erunt quadrata rectarum *ab*, CD. Fig. 10. T. XIII.

COROLLARIUM IV.

In ellipſi ordinatæ ad axim æqualiter diſtantes a verticibus ſunt æquales.

43. Ut ſi diſtantia A*m* ordinatæ *ab* a vertice A in ellipſi ACBD fuerit æqualis diſtantiæ B*y* ordinatæ *pz* a vertice B, duæ ordinatæ *ab*, *pz* ad axim AB erunt æquales. Poſita ſiquidem æqualitate ſegmentorum A*m*, B*y*, etiam duo ſegmenta *m*B, A*y* erunt æqualia; atque adeo rectangulum ex A*m* in *m*B æquabit rectangulum ex B*y* in *y*A. Quadratum autem ordinatæ *ab* eſt ad quadratum ordinatæ *pz*, ut rectangulum ex A*m* in *m*B ad rectangulum ex B*y* in *y*A (d). Ergo etiam quadrata rectarum *ab*, *pz* erunt æqualia; & ideo ipſæ quoque *ab*, *pz* erunt æquales (e). Fig. 10. T. XIII.

COROLLARIUM V.

In ellipſi ordinatæ ad axim æqualiter diſtantes ab illius centro ſunt æquales.

44. Cum enim centrum ellipſeos ſit punctum in medio axis (f), ordinatæ ad axim æqualiter diſtantes a centro, æqualiter quoque diſtant a verticibus; adeoque ſunt æquales (g).

(a) Lib. I. §. 187.
(b) Ibid. §. 188.
(c) §. 38.
(d) §. 42.
(e) Lib. I. §. 127.
(f) §. 28.
(g) §. 43.

COROLLARIUM VI.

In ellipſi ſemiordinatæ ad axim æqualiter diſtantes a verticibus, aut a centro ſunt æquales.

45. Etenim ſemiordinatæ ſunt directe inter ſe, ut ordinatæ (a).

THEOREMA II.

Recta in ellipſi tranſiens per illius centrum, atque ad angulos rectos dividens axim, dividit bifariam, & ad angulos rectos omnes rectas ipſi axi parallelas.

46. In ellipſi ACBD, cujus axis ſit recta AB, & centrum *x*, ducatur per *x* recta CD, quæ ad rectos angulos ipſum axim dividat. Dico, rectam CD dividere bifariam, atque ad rectos angulos omnes rectas axi AB parallelas.

Demonſtratio.

In æquali diſtantia a centro *x* ducantur ad axim AB ſemiordinatæ *am*, *py*, quę propter hypotheſim parallelæ erunt
Fig. 10. T. XIII. tum inter ſe, tum ſemiordinatæ C*x* (b), & jungantur extrema *a*, *p* recta *ap*. Quoniam igitur rectæ *am*, *py* ſunt æquales (c), & parallelæ, etiam duæ *ap*, *my* erunt parallelæ (d); ac proinde quadrilaterum *mapy* erit parallelogrammum (e), & quidem rectangulum (f); cum anguli *amy*, *pym* ſint recti (g). Parallelogramma itidem rectangula erunt duo quadrilatera *auxm*, *xupy* ob paralleliſmum rectæ *ux* cum utraque *am*, *py*, & ob rectitudinem angulorum *mxu*, *uxy*. Igitur duo latera *au*, *mx* æqualia erunt inter ſe, ſicuti etiam duo *up*, *xy* (h). Anguli quoque *xua*, *xma* erunt æquales, quemadmodum etiam anguli *xup*, *pyx* (i). Duo autem

(a) Lib. I. §. 126.
(b) §. 17.
(c) §. 45.
(d) Lib. V §. 88.
(e) Lib. VI §. 8.
(f) Ibid. §. 9.
(g) §. 12.
(h) Lib. VI. §. 20.
(i) Ibid. §. 18.

Digitized by Google

autem latera *mx*, *xy* poſita ſunt æqualia, & anguli *xma*, *xyp* ſunt recti. Ergo æqualia itidem erunt latera *au*, *up*, & recti anguli *aux*, *xup* (a). Itaque recta *ap* axi AB parallela dividitur biſariam, atque ad rectos angulos a recta CD. Idipſum de quavis alia recta axi AB parallela eodem modo demonſtrabitur. Igitur recta &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Recta in ellipſi tranſiens per illius centrum, ejuſque axim ad angulos rectos dividens, eſt alter axis ipſius ellipſis, & quidem priori conjugatus.

47. Recta nimirum CD eſt alter axis ellipſeos ACBD, & quidem axi AB conjugatus. Dividit enim biſariam, atque ad angulos rectos omnes rectas axi AB parallelas, prout exigit axis (b); cumque viciſſim axis AB dividat biſariam, & ad rectos angulos omnes rectas parallelas rectæ CD, erunt AB, CD axes ipſius ellipſis ACBD conjugati (c). Fig. 10. T. XIII.

SCHOLION.

48. Duo itaque ſunt axes in ellipſi; & quoniam inæquales ſunt inter ſe (d), alter *major*, *minor* alter vocari ſolet. In ellipſi deſumta a cono recto, *major axis* determinatur a triangulo per axim trajecto, atque ellipticum planum ſecante. Hinc *axis major* dicitur etiam *axis* ellipſeos *primarius*, & *primaria diameter*. At vero *minor axis* ellipſeos *axis ſecundarius*, & *ſecundaria diameter* nuncupatur.

LEM-

(a) Synop. Algeb. §. 259.
(b) §. 12.
(c) §. 31.
(d) §. 42.

Digitized by Google

LEMMA II.

Si recta linea ſecetur æqualiter, & inæqualiter, rectangulum ſub inæqualibus ſegmentis comprehenſum una cum quadrato ſegmenti intermedii erit æquale quadrato partis dimidiæ.

Euclid. l.2. p.5. 49. Recta linea AB ſecta ſit biſariam in C, & utcunque in D. Dico, rectangulum FD contentum ſub ſegmentis inæqualibus AD, DB, una cum quadrato CG ſegmenti intermedii CD, æquare quadratum AE partis dimidiæ AC.

Demonſtratio I.

Ponatur AC $= CB = a$, CD $= b$, adeoque AD $= a + b$, Fig. 13. T. XIII. & DB $= a - b$. Quadratum ergo AE partis dimidiæ AC erit $= aa$, rectangulum FD $= aa + ab - ab - bb = aa - bb$, & quadratum CG $= bb$. Quamobrem rectangulum FD una cum quadrato CG erit $= aa - bb + bb$. Conſtat autem eſſe $aa - bb + bb = aa$. Ergo rectangulum FD una cum quadrato CG æquabit quadratum aa, ſive AE partis dimidiæ AC.

Demonſtratio II.

Deſcripto enim circà totam AB ſemicirculo AEB, erectaque ex puncto D recta perpendiculari DH, ducatur ex centro C ad punctum H recta CH. Quoniam igitur rectangulum ex AD in DB, ſcilicet FD, eſt æquale quadrato rectæ DH (a), rectangulum FD una cum quadrato CG rectæ CD erit æquale quadratis rectarum DH, CD ſimul ſumtis (b). Duo autem iſta quadrata ſimul ſumta ſunt æqualia quadrato rectæ CH (c), adeoque etiam quadrato AE rectæ AC (d). Ergo rectangulum quoque FD una cum quadrato CG rectę

CD

(a) Lib. IX. §. 113.
(b) Synop. Alg. §. 265.
(c) Lib. VI. §. 37.
(d) Lib. I. §. 187.

Digitized by Google

CD erit æquale quadrato AE partis dimidiæ AC (a). Itaque ſi recta &c. quod erat oſtendum.

THEOREMA III.

In ellipſi etiam quadrata ſemiordinatarum ad minorem axim ſunt directe inter ſe, ut rectangula ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis ſumtis ab utroque vertice comprehenſa. At vero illis non ſunt æqualia.

Recta AB ſit axis major, & recta CD axis minor ellipſeos ACBD ſeſe mutuo bifariam dividentes in centro *x*. Ducatur autem ad axim minorem ſemiordinata *br*, & ex puncto *b* ſemiordinata *bm* ad axim majorem, quæ cum parallelogrammum *mxrb* conſtituant, ob paralleliſmum ſcilicet rectarum *mb*, *x*D, necnon rectarum *br*, A*x*, erit *bm* = *xr*, & *br* = *mx* (b). Fig. 14. T. XIII.

I.

50. Dico primo, quadratum *x*G ſemiordinatæ A*x* eſſe ad quadratum *b*F ſemiordinatæ *br*, ut eſt rectangulum *x*E contentum ſub ſegmentis C*x*, *x*D ipſius axis CD ad rectangulum C*y* ſub ſegmentis C*r*, *r*D ejuſdem axis comprehenſum.

Demonſtratio.

Eſto *bz* quadratum ſemiordinatæ *bm* ad majorem axim, & *mn* ſit rectangulum contentum ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis; & quoniam habetur C*x* = *x*D, & A*x* = *x*B, quadratum *x*E ſemiordinatæ *x*D ad majorem axim non erit diverſum a rectangulo contento ſub portionibus C*x*, *x*D, quæ correſpondent ſemiordinatæ A*x* ad axim minorem, & quadratum *x*G ſemiordinatę A*x* ad eundem axim

(a) Syn. Alg. §. 212. (b) Lib. VI. §. 20.

Digitized by Google

axim non erit diverſum a rectangulo, quod ſub portionibus Ax, xB axis majoris correſpondentibus ſemiordinatę xD comprehenditur. Cum ergo ſit $xE \cdot bz = xG \cdot mn$ (a), erit quoque $xE - bz \cdot xE = xG - mn \cdot xG$ (b); adeoque $xE, xE - bz = xG \cdot xG - mn$ (c). Eſt autem $xE - bz = Cy$; cum rectangulum, ſeu quadratum xE ſit æquale rectangulo Cy, una cum quadrato bz (d); atque eadem ratione ſit $xG - mn = bF$, quod nempe quadratum xG adęquet rectangulum mn, una cum quadrato bF. Ergo erit $xE \cdot Cy = xG, bF$, ſive $xG, bF = xE \cdot Cy$.

II.

51. Dico 2.; quadratum xG ſemiordinatæ Ax non eſſe æquale rectangulo xE, nec quadratum bF ſemiordinatæ br æquare rectangulum Cy.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum demonſtratione tradita §. 39. Itaque in ellipſi &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Etiam quadrata ordinatarum ad minorem axim ellipſeos ſunt directe inter ſe, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis.

52. Demonſtratur eodem modo, quo §. 42. idipſum oſtenſum eſt de quadratis ordinatarum ad majorem axim.

COROL-

(a) §. 38.
(b) Lib. I. §. 141.
(c) Ibid. §. 121.
(d) §. 49.

COROLLARIUM II.

Tam ordinatæ, quam ſemiordinatæ ad minorem axim ellipſeos æqualiter diſtantes a ſuo vertice reſpective, aut a centro, ſunt æquales.

53. Oſtenditur eodem modo, quo §. 43, 44, 45, idipſum demonſtravimus de ordinatis, & ſemiordinatis ad majorem axim.

COROLLARIUM III.

Tota peripheria circuli deſcripti circa majorem axim ellipſeos cadit extra curvam ellipticam; intra illam vero tota peripheria circuli deſcripti circa axim minorem.

54. Tota nimirum peripheria circuli AECF deſcripti circa majorem axim AC ellipſeos ABCD reperitur extra curvam ellipticam ABCD; intra illam vero tota peripheria cir- Fig. 15.
culi AECF deſcripti circa axim minorem AC, ita nimirum Fig. 16. T. XIII.
ut duo tantum extrema puncta axis ſint illis curvis communia. Etenim, ſi punctum *b* eſſet commune utrique curvæ, ellipticæ ſcilicet ABCD, & circulari AECF, recta *ab* eſſet ſemiordinata ad axim tam circuli, quam ellipſis; cumque quadratum ſemiordinatæ *ab* in circulo adæquet rectangulum ex A*a* in *a*C (a), idipſum verum eſſet in ellipſi, ſecus ac ipſa natura ellipſeos poſtulet.

(a) Lib. IX. §. 113.

COROLLARIUM IV.

In ellipſi quadrata ſemiordinatarum ad majorem axim ſunt minora rectangulis contentis ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis. Quadrata vero ſemiordinatarum ad axim minorem ſunt majora correſpondentibus rectangulis.

55. Etenim, deſcripto circa majorem axim AC ellipſeos ABCD circulo AECF, ductiſque ſemiordinatis *ae*, MD, iiſque ad peripheriam uſque circuli productis, cum ſemiordinata *ae* in ellipſi deficiat a ſemordinata *ab* in circulo (a), quadratum ſemiordinatæ *ae* minus erit quadrato ſemiordinatæ *ab*. Quadratum autem ſemiordinatæ *ab* adæquat rectangulum ex A*a* in *a*C (b). Ergo quadratum ſemiordinatæ *ae* ab eodem rectangulo deficiet. Eodem modo oſtendam, quadratum ſemiordinatæ MD deficere a rectangulo ex AM in MC. Contra vero, deſcripto circulo AECF circa axim minorem AC ellipſeos ABCD, eodem ratiocinio oſtendetur, quadratum ſemiordinatæ *ab* in ellipſi excedere rectangulum ex A*a* in *a*C, quod nempe huic rectangulo ſit æquale quadratum ſemiordinatæ *ae* in circulo, ſitque ſemiordinatæ *ae* quadratum minus quadrato ſemiordinatæ *ab*, quemadmodum recta *ae* deficit a recta *ab*.

Fig. 15. Fig. 16. T. XIII.

COROLLARIUM V.

Quadrata ſemiordinatarum ad axim ellipſeos tam majorem, quam minorem habent omnia eandem rationem ad ſua reſpective rectangula ſub correſpondentibus axis portionibus comprehenſa.

Fig. 15. T. XIII. 56. Videlicet quadratum ſemiordinatæ *ae* ad axim AC ellipſeos ABCD eam habet rationem ad rectangulum ex A*a* in

in

(a) §. 54. (b) Lib. IX. §. 113.

in *a*C, quam ad rectangulum ex AM in MC habet quadratum ſemiordinatæ MD. Cum enim quadratum ſemiordinatæ *ae* ſit ad quadratum ſemiordinatæ MD, ut eſt rectangulum ex A*a* in *a*C ad rectangulum ex AM in MC (a), *alternando,* erit ſimiliter quadratum ſemiordinatę *ae* ad rectangulum ex A*a* in *a*C, ut eſt quadratum ſemiordinatę MD ad rectangulum ex AM in MC (b).

THEOREMA IV.

In ellipſi ſemiordinatæ ad utrumque axim eandem omnes habent rationem ad ſibi reſpondentes ſemiordinatas ad diametrum circuli circa ipſum axim deſcripti.

57. Circa majorem axim AC ellipſis ABCD deſcribatur circulus AECF, ſintque rectæ MD, *ae* ſemiordinatæ ad ipſum axim in ellipſi, & rectæ MF, *ab* ſemiordinatæ ad diametrum circuli illis correſpondentes. Dico, eſſe MD. MF ≑ *ae*. *ab*.

Demonſtratio.

Quadratum ſemiordinatæ MD eſt ad quadratum ſemiordinatæ *ae*, ut rectangulum ex AM in MC ad rectangulum ex A*a* in *a*C (c). Eſt autem etiam quadratum ſemiordinatæ MF ad quadratum ſemiordinatæ *ab*, ut hęc ipſa rectangula (d). Ergo quadratum ſemiordinatę MD erit ad quadratum ſemiordinatę *ae*, ut quadratum ſemiordinatę MF ad quadratum ſemiordinatę *ab* (e); & *alternando*, quadratum ſemiordinatę MD erit ad quadratum ſemiordinatę MF, ut quadratum ſemiordinatę *ae* ad quadratum ſemiordinatę *ab* (f). Igitur erit quoque MD. MF ≑ *ae*. *ab* (g). Deſcripto porro circa minorem axim AC ellipſeos ABCD circulo AECF, demonſtrabitur eodem modo, eſſe *m*D. *m*F ≑ *ab*. *ae*. Itaque in ellipſi &c. quod erat oſtendendum. Fig. 15. Fig. 16. T. XIII.

 COROL-

(a) §. 38. 50.
(b) Lib. I. § 125.
(c) §. 38.
(d) §. 36.
(e) Lib. I. §. 76.
(f) Ibidem §. 125.
(g) Ibidem §. 118.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

58. Hinc ſequitur, eſſe MD. DF = *ae* . *eb*. Cum enim
Fig. 15. ſit MD. MF = *ae*.*ab*, erit etiam MF. MD = *ab*.*ae* (a), &
Fig. 16. *dividendo*, MF—MD. MD = *ab*—*ae*. *ae* (b), ſive DF. MD
T. XIII. = *eb*.*ae*, adeoque MD. DF = *ae*.*eb* (c). Similiter in ellipſi ABCD cum ſit *m*D. *m*F = *ab*. *ae*, erit FD. *m*F = *eb*. *ae* (d); atque propterea *m*F. FD = *ae*.*eb* (e).

COROLLARIUM II.

Etiam ordinatæ ad utrumque axim ellipſeos habent omnes eandem rationem ad ordinatas ſibi correſpondentes in circulo circa axim deſcripto.

59. Erit nempe BD. EF = *ne*.*db*. Enimvero, cum ſit BD = 2MD, & EF = 2MF, erit BD. EF = MD. MF (f). Eſt
Fig. 15. autem eandem ob cauſam *ne*. *db* = *ae*.*ab*, jamque conſtat, eſſe MD. MF = *ae*.*ab* (g). Ergo erit BD. EF = *ne*.*db* (h).
Fig. 16. T. XIII. Eodem ratiocinio palam fiet in ellipſi ABCD, circa cujus minorem axim AC deſcriptus ſit circulus AECF, eſſe BD. EF = *db*.*ne*.

COROLLARIUM III.

Ordinatæ ad utrumque axim ellipſeos ſunt directe inter ſe, ut ordinatæ ſibi correſpondentes in circulo circa axim deſcripto.

60. Videlicet iiſdem poſitis, erit BD. *ne* = EF. *db*. Quip-
Fig. 15. pe, cum jam oſtenſum fuerit, eſſe BD. EF = *ne*.*db*, mani-
Fig. 16. T. XIII. feſte ſequitur, eſſe itidem BD. *ne* = EF. *db* (i). Similiter cum ſit BD. EF = *db*.*ne*, erit quoque BD. *db* = EF. *ne*.

CO-

(a) Lib. I. §. 121.
(b) Ibid. §. 135.
(c) Ibid. §. 121.
(d) Ibid. §. 135.
(e) Ibid. §. 121.
(f) Ibid. §. 127.
(g) §. 57.
(h) Lib. I. §. 77.
(i) Ibid. §. 125.

Digitized by Google

COROLLARIUM IV.

Axis ellipſeos eſt maxima omnium ordinatarum ad alterum axim.

61. Sic in ellipſi ABCD axis minor BD eſt major, quam recta *ne* ordinata ad majorem axim AC, & in ellipſi itidem ABCD axis major BD eſt major, quam ordinata *db* ad axim minorem AC. Quandoquidem, circulis circa ipſos axes deſcriptis, cum ſit BD. EF = *ne*. *db* (a), quemadmodum recta EF eſt major recta *db* (b), ita recta BD excedet rectam *ne* (c). Eandem ob cauſam BD erit major, quam *db*; cum nempe ſit BD. EF = *db*. *ne*, & EF major, quam *ne*. Fig. 15. Fig. 16. T. XIII.

COROLLARIUM V.

Ordinatæ ad utrumque axim ellipſeos eo minores ſunt, quo magis ab illius centro recedunt.

62. Nimirum in ellipſi ABCD ordinata *ne* ad axim AC magis remota a centro M, quam ordinata *xz*, minor erit, quam ipſa *xz*. Etenim, cum ſit *xz*. GH = *ne*. *db* (d), ſicuti recta GH excedit rectam *db* (e), ita ordinata *xz* ordinatam *ne* quantitate ſuperabit (f). Fig. 15. T. XIII.

THEOREMA V.

Rectæ tangentes ellipſim ductæ per extrema puncta ejuſdem diametri, ſunt inter ſe parallelæ.

63. Per extrema puncta A, B diametri AB ducantur rectæ AE, BF, quarum utraque tangat ellipſim ACBD. Dico, rectas AE, BF eſſe inter ſe parallelas. Fig. 16. T. XIII.

Demon-

(a) §. 59. (b) Lib. VII. §. 64. (c) Lib. I. §. 128. (d) §. 59. (e) Lib. VII. §. 64. (f) Lib. I. §. 128.

Demonſtratio.

Ducatur ordinata *CD* ad ipſam diametrum. Itaque rectæ AE, utpote tangens ellipſim, erit parallela ordinatæ *CD* (a). Eadem autem ratione etiam recta BF eſt eidem *CD* parallela. Ergo duæ AE, BF inter ſe quoque ſunt parallelæ (b). Igitur rectæ tangentes &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VI.

Recta lineæ ductæ a centro ellipſeos ad extrema duarum ordinatarum ad axim æqualiter a centro diſtantium, ſunt omnes inter ſe æquales; atque binas rectas per centrum ellipſis tranſeuntes illæ conſtituunt.

Fig. 17. T. XIII. In ellipſi ACBD ſint duæ ordinatæ *ae*, *db* ad axim AB, æqualiter diſtantes a centro *n*, ad quarum extrema ducantur ex ipſo centro rectæ *na*, *ne*, *nd*, *nb*.

I.

64. Dico primo, rectas *na*, *ne*, *nd*, *nb* eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Cum enim latera *az*, *ze* triangulorum *nza*, *nze* ſint æqualia, latus *zn* ſit utrique commune, & anguli *nza*, *nze*, qui æqualibus lateribus continentur, ſint æquales, utpote recti (c), baſes quoque *na*, *ne* inter ſe æquales erunt (d). Eadem ratione etiam duæ *nd*, *nb* erunt æquales. Rurſus quoniam duæ ordinatæ *ae*, *db* ſunt æquales (e), æqualia itidem erunt earum dimidia *ze*, *yb* (f); cumque per hypotheſim etiam rectæ *zn*, *ny* ſint æquales, ſicuti etiam anguli

nze,

(a) §. 22.
(b) Lib. IV. §. 17.
(c) §. 12.
(d) Lib. V. §. 73.
(e) §. 44.
(f) Lib I. §. 126.

Digitized by Google

nze, *nyb*; utpote recti (a), baſes ſimiliter *ne*, *nb* triangulorum *zne*, *nyb* erunt æquales (b). Igitur æquales erunt etiam duæ *na*, *nd* (c); ac proinde quatuor rectæ *na*, *ne*, *nd*, *nb* ſunt inter ſe æquales.

II.

65. Dico 2. rectas *dn*; *ne*; ſicuti etiam rectas *an*, *nb*, eſſe in directum poſitas, ſive quatuor rectas *na*, *ne*, *nd*, *nb* conſtituere binas rectas per centrum *n* tranſeuntes.

Demonſtratio.

Duo latera *nd*, *ne* triangulorum *nyd*, *nze* ſunt æqualia (d); ſicuti etiam duo *ny*, *nz* per hypotheſim, necnon duo *dy*, *ze*, utpote dimidia ordinatarum æqualium *db*, *ae*. Igitur anguli quoque *dny*, *zne* ſunt æquales (e); ac propterea duæ rectæ *dn*, *ne* ſunt in directum poſitæ (f). Eadem ratione in directum poſitæ ſunt etiam duæ *an*, *nb*. Itaque rectæ *na*, *ne*, *nd*, *nb* binas rectas conſtituunt; adeoque rectæ &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

66. Hinc *in ellipſi duci poſſunt ex illius centro ad curvam, qua terminatur, quatuor rectæ inter ſe æquales.*

COROLLARIUM II.

In ellipſi recta conjungens extrema ſumta ex adverſo duarum ordinatarum ad axim æqualiter a centro diſtantium, tranſit per centrum ipſius ellipſis.

67. Oſtenſum namque eſt, rectas *ne*, *nd*, quibus cum cen-

(a) §. 12.
(b) Lib.V. §.73.
(c) Synop.Alg. §.259.
(d) §. 64.
(e) Lib.V. § 82.
(f) Lib.III. §.55.

Digitized by Google

centro *n* junguntur extrema *e*, *d* ordinatarum *ae*, *db* æqualiter diſtantium ab ipſo centro, unam rectam conſtituere. Ergo recta ducta ab extremo *d* per centrum *n* tranſibit per extremum *e*. Quippe, ſi ſecus, duæ rectæ haberent ſegmentum commune, quod repugnat (a).

COROLLARIUM III.

In ellipſi omnes rectæ per centrum ductæ, & utrinque ad curvam ellipticam terminatæ, biſariam in ipſo centro dividuntur.

Apoll. l.I.p.30 68. Demonſtravimus enim, rectas *nd*, *ne* eſſe æquales inter ſe, & unam rectam conſtituere, quæ per centrum tranſit. Hinc

COROLLARIUM IV.

Omnis diameter ellipſis tranſit per illius centrum.

69. Etenim, ſi ſecus, biſariam non divideret omnes rectas eidem rectæ parallelas, prout ad diametrum requiritur. Quippe illam rectam non ſecaret biſariam, quæ per centrum tranſit; cum hujuſmodi recta nonniſi in ipſo centro biſariam dividatur (b).

COROLLARIUM V.

In ellipſi rectæ lineæ ductæ a centro ad curvam ellipticam æqualiter hinc inde ab axe diſtantes, ſunt inter ſe æquales.

70. Oſtenſum eſt enim, rectas *na*, *ne*, quæ ob æqualitatem rectarum *za*, *ze* æqualiter diſtant ab axe AB, eſſe inter ſe æquales.

CO-

(a) Lib. III. §. 48. (b) §. 68.

Digitized by Google

COROLLARIUM VI.

Quævis diameter ellipſeos eſt una ex ordinatis ad diametrum ſibi conjugatam.

71. Sic diameter *ed* ellipſeos A*e*D eſt una ex ordinatis ad diametrum ſibi conjugatam AB. Bifariam namque dividitur a diametro AB in centro *n* (a), eſtque iis omnibus parallela, quæ ſunt ad ipſam diametrum AB ordinatim applicatæ (b). Fig. 9. T. XIII.

COROLLARIUM VII.

Unus axis ellipſeos eſt una ex ordinatis ad alterum axim.

72. Axes namque ellipſeos ſunt ejuſdem diametri conjugatæ (c).

THEOREMA VII.

Si ex punctis extremis unius diametri ellipſeos ducantur rectæ ellipſim tangentes, quæ cum alia diametro in directum producta concurrant, illæ æquales erunt inter ſe, duoque æqualia triangula conſtituent.

Per extrema puncta A, B diametri AB ellipſis ACBD ducantur rectæ AE, BF ellipſim tangentes, quæ concurrant in punctis E, F cum altera diametro *ed* in directum utrinque producta. Fig. 17. T. XIII.

I.

73. Dico primo; rectas AE, BF eſſe inter ſe æquales.

(a) §. 68. (b) §. 30. (c) §. 47.

Demonſtratio.

Quoniam rectæ AE, BF ſunt parallelæ (a), alterni anguli EA*n*, FB*n* erunt inter ſe æquales (b). Æquales ſunt autem etiam anguli ad verticem oppoſiti A*n*E, B*n*F (c), nec non latera A*n*, *n*B (d), quæ in triangulis A*n*E, B*n*F æqualibus angulis adjacent. Ergo latera quoque AE, BF erunt inter ſe æqualia (e).

II.

74. Dico 2. triangula A*n*E, B*n*F eſſe æqualia;

Demonſtratio.

Duo namque triangula A*n*E, B*n*F ſunt hujuſmodi, ut duo latera A*n*, *n*B habeant æqualia, quæ æqualibus angulis adjacent, ut modo demonſtravimus. Ergo ſunt æqualia (f). Itaque ſi ex punctis &c. quod erat oſtendendum.

DEFINITIO V.

75. *Parameter axis ellipſeos dicitur recta linea ducta per extremum punctum ipſius axis, ejus ordinatis parallela, cujus ratio ad ipſum axim diverſa ab ea non eſt, quam habet quadratum cujuſvis ſemiordinatæ ad rectangulum ſub correſpondentibus axis portionibus comprehenſum.* Ut ſi per extremum punctum
Fig. 18. T. XIII. A axis AC ellipſeos ABCD ducatur recta AE parallela ordinatæ BD, ſitque recta AE ad axim AC, ut quadratum cujuſvis ſemiordinatæ *ba* ad rectangulum ex A*b* in *b*C, recta AE erit *parameter* axis AC. Hujuſmodi autem rectæ nomen *parametri* inditum eſt, quia eo utimur, ut patebit, ad dimetienda quadrata ſemiordinatarum ad ipſum axim. Ceterum

(a) §. 63.
(b) Lib. IV. §. 15.
(c) Lib. III. §. 51.
(d) §. 68.
(e) Lib. V. §. 93.
(f) Ibid. §. 94.

Digitized by Google

terum recta; quam nunc *parametrum* dicimus, *latus rectum* olim vocabatur, ad differentiam axis, ex cujus vertice parameter educitur, qui *latus tranſverſum* nunc etiam vocari ſolet.

COROLLARIUM I.

76. *Parameter axis ad perpendiculum axi incumbit*. Cum enim parameter AE axis AC ſit recta parallela ſemiordinatæ *ba* ad ipſum axim, duo anguli interni EA*b*, A*ba* æquales erunt duobus rectis (a). Angulus autem A*ba* eſt rectus (b). Ergo rectus erit etiam angulus EA*b*; ac proinde recta EA rectæ AC ad perpendiculum inſiſtet (c).

COROLLARIUM II.

77. *Parameter tangit ellipſim in vertice axis; ex quo educitur*. Sic parameter EA eſt recta tangens ellipſim in vertice A axis AC, ex quo educitur. Patet evidenter ex eo, quod parameter ſit recta parallela ordinatim axi applicatis, ducta ex illius vertice (d).

DEFINITIO VI.

78. *Figura axis ellipſeos eſt rectangulum contentum ſub ipſo axe, ejuſque parametro*. Sic rectangulum ACKE, quod ſub axe AC, & ſub ejus parametro AE comprehenditur, eſt figura axis AC ellipſeos ABCD. Fig. 11. T. XIII.

DEFINITIO VII.

79. *Regulatrix, ſive directrix ellipſeos dicitur recta linea ducta ab extremo parametri ad alterum extremum punctum axis ipſius ellipſis. Subregulatrix vero, ſeu ſubdirectrix vocatur illa recta linea, quæ ducta a centro ellipſeos ad parametrum, ipſum para-*

(a) Lib. IV. §. 13.
(b) §. 12.
(c) Lib. III. §. 24.
(d) §. 75.

Digitized by Google

parametrum biſariam dividit. Sic recta EC ducta ex puncto extremo E parametri AE ad extremum punctum C axis AC, *regulatrix*, ſive *directrix* ellipſeos ABCD nuncupatur. Ejuſdem vero *ſubregulatrix*, ſive *ſubdirectrix* recta FN ducta a centro F ellipſis ad parametrum AE, ipſumque biſariam dividens in puncto N.

COROLLARIUM.

80. *Subdirectrix ellipſeos eſt parallela rectæ directrici, ejuſque pars dimidia*. Enimvero, cum ſit AF=FC, & per hypotheſim AN=NE, erit AF.FC=AN.NE. Ergo recta FN erit parallela rectæ CE (a). Rurſus, cum propter paralleliſmum ipſarum FN, CE, ſit FN.CE=AF.AC (b), quemadmodum habetur AC=2AF, ita erit CE=2FN. Hinc recta FN *ſemidirectrix* etiam, vel *ſemiregulatrix* ellipſeos vocari ſolet.

THEOREMA VIII.

Unus axis ellipſeos eſt media proportionalis inter alterum axim ſibi conjugatum, ejuſque parametrum.

81. Rectæ AC, BD ſint axes ellipſis ABCD. Recta vero AE ſit parameter unius ex illis AC. Dico, alterum axim BD eſſe mediam proportionalem inter axim AC, ejuſque parametrum AE.

Fig. 18. T. XIII.

Demonſtratio.

Quoniam axis AC eam habet rationem ad ſuum parametrum AE, quam habet rectangulum ex AF in FC, ſive quadratum HF ſemiaxis FC ad quadratum GF ſemiordinatæ, ſeu ſemiaxis BF (c), ſicuti quadratum HF eſt ad quadratum GF in ratione *duplicata* lateris FC ad latus BF (d), ita axis

(a) Lib. IX. §. 64. (b) Ibid. §. 59. (c) §. 75. (d) Lib. IX. §. 172.

Digitized by Google

axis AC eſt ad ſuum parametrum AE in ratione *duplicata* ſemiaxis FC ad ſemiaxim BF; ac proinde etiam totius axis AC ad totum axim BD (a); cum nempe ſit AC.BD = FC.BF (b). Facta autem hypotheſi, ut ſit ∺ AC.BD.AE, ratio primæ AC ad tertiam AE eſt *duplicata* illius, quam habet eadem prima AC ad ſecundam BD (c). Ergo reipſa habetur ∺ AC.BD.AE; atque propterea unus axis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Quadratum unius axis ellipſeos adæquat figuram alterius axis ſibi conjugati.

82. Quadratum nempe unius axis BD ellipſeos ABCD adæquat figuram ACKE alterius axis ſibi conjugati AC. Enimvero, cum axis BD ſit media proportionalis inter alterum axim AC, & ejus parametrum AE (d), quadratum ipſius axis AD erit æquale rectangulo ACKE (e). Hujuſmodi autem rectangulum eſt figura axis AC (f). Ergo &c.

COROLLARIUM II.

Quadratum unius ſemiaxis ellipſeos eſt æquale quadranti figuræ alterius axis.

83. Videlicet quadratum GF ſemiaxis BF ellipſeos ABCD eſt æquale quartæ parti figuræ ACKE alterius axis AC. Quandoquidem bifariam diviſis lateribus AE, AC rectanguli ACKE, conſtitutoque rectangulo AFγN, duo rectangula ACKE, AFγN erunt ſimilia (g); adeoque rectangulum AFγN erit ad rectangulum ACKE in ratione *duplicata* lateris AF ad latus AC (h); cumque ſit AF = $\frac{AC}{2}$, rectangulum

(a) Lib. I. §. 126.
(b) Ibid. §. 127.
(c) Ibid. §. 177.
(d) §. 81.
(e) Lib. IX. §. 112.
(f) §. 78.
(g) Lib. IX. §. 85.
(h) Ibid. §. 170.

Digitized by Google

gulum AFγN erit quarta pars rectanguli ACKE (a). Eſt autem eadem ratione etiam quadratum GF ſemiaxis GF quarta pars quadrati totius axis BD. Ergo quadratum GF eſt ad quadratum totius axis BD, ut rectangulum AFγN ad rectangulum ACKE. Quadratum porro totius axis BD adæquat rectangulum ACKE (b). Ergo etiam quadratum GF æquabit rectangulum AFγN (c).

COROLLARIUM III.

Si circa majorem axim ellipſeos deſcribatur circulus, cujus peripheriæ occurrat tangens ducta ex puncto extremo axis minoris, tum ex illo puncto occurſus agatur ſemiordinata ad majorem axim, rectangulum contentum ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis erit æquale quadranti figuræ ejuſdem axis.

84. Ut ſi deſcribatur circulus AECF circa majorem axim
Fig. 15. T. XIII. AC ellipſeos ABCD, atque ex puncto extremo D axis minoris BD ducatur tangens DQ occurrens peripheriæ ipſius circuli in puncto Q, ex quo ducatur ad axim majorem AC ſemiordinata PQ, rectangulum contentum ſub ſegmentis AP, PC axis AC ſemiordinatæ QP correſpondentibus, erit æquale quadranti figuræ ipſius axis AC. Cum enim recta QP ad perpendiculum inſiſtat diametro AC (d), rectangulum ex AP in PC erit æquale quadrato rectæ PQ (e). Quadratum autem rectæ PQ eſt æquale quadrato ſemiaxis MD, cum rectæ PQ, MD ſint æquales (f). Ergo etiam rectangulum ex AP in PC erit æquale quadrato ſemiaxis MD (g). Quadratum porro ſemiaxis MD eſt æquale quadranti figuræ axis AC (h). Ergo eidem quadranti rectangulum quoque ex AP in PC erit æquale (i).

COROL-

(a) Lib. IX. §. 170.
(b) §. 82.
(c) Lib. I. §. 128.
(d) §. 12.
(e) Lib. IX. §. 113.
(f) Lib. VI. §. 29.
(g) Syn. Alg. §. 261.
(h) §. 83.
(i) Synop. Algeb. §. 262.

Digitized by Google

COROLLARIUM IV.

Axes ellipſeos ſunt duæ mediæ continuo proportionales inter ſuos parametros.

85. Videlicet axis major BD ellipſeos ABCD, & axis minor AC ſunt duæ mediæ continuo proportionales inter ſuos parametros GC, DH. Eſt enim GC. BD = BD. AC, ſicuti etiam BD. AC = AC. DH (a). Ergo erit GC. BD = BD. AC = AC. DH. Fig. 16. T. XIII.

THEOREMA IX.

Quadratum cujuſvis ſemiordinatæ ad axim ellipſeos adæquat rectangulum contentum ſub abſciſſa, & ſub recta intercepta inter ipſum axim, & rectam regulatricem ipſi ſemiordinatæ correſpondente.

86. Recta AC ſit axis ellipſeos ABCD, parameter recta AE, & regulatrix recta EC. Dico, quadratum cujuſvis ſemiordinatæ *ba* æquare rectangulum A*be*M contentum ſub abſciſſa A*b*, & ſub recta *be*, quæ interiicitur inter axim AC, & rectam regulatricem EC, ipſique ſemiordinatæ *ba* correſpondet. Fig. 18. T. XIII.

Demonſtratio.

Recta DF ſit alter ſemiaxis ipſius ellipſis, adeoque una ex ſemiordinatis ad axim AC (b); ſemiordinatæ propterea *ba* parallela (c). Igitur erit *be*. F*y* = *b*C. FC (d). Et quoniam rectangulum A*be*M eſt ad rectangulum AF*y*N in ratione compoſita ex ratione baſis A*b* ad baſim AF, & ex ratione altitudinis *be* ad altitudinem F*y* (e), poſita analogia

be. F*y*

(a) 81.
(b) 72.
(c) §. 27.
(d) Lib. IX. §. 59.
(e) Ibid. §. 105.

Digitized by Google

be.F*y*=*b*C.FC, rectangulum A*be*M erit ad rectangulum AF*y*N in ratione quoque compoſita ex ratione rectæ A*b* ad rectam AF, & ex ratione rectæ *b*C ad rectam FC. Conſtat autem, rectangulum ex A*b* in *b*C eſſe ad rectangulum ex AF in FC in ratione compoſita ex ratione rectæ A*b* ad rectam AF, & ex ratione rectæ *b*C ad rectam FC (a), ſpectando nempe priores terminos, veluti illorum baſes, & poſteriores, veluti eorundem altitudines. Ergo ratio rectanguli A*be*M ad rectangulum AF*y*N diverſa ab ea non erit, quam habet rectangulum ex A*b* in *b*C ad rectangulum ex AF in FC (b). Manifeſtum porro eſt, quadratum ſemiordinatæ *ba* eſſe ad quadratum ſemiordinatæ FD, ut eſt rectangulum ex A*b* in *b*C ad rectangulum ex AF in FC (c). Ergo quadratum ſemiordinatæ *ba* erit ad quadratum ſemiordinatæ FD itidem, ut rectangulum A*be*M ad rectangulum AF*y*N (d), & *alternando*, quadratum ſemiordinatæ *ba* erit ad rectangulum A*be*M, ut quadratum ſemiordinatæ FD ad rectangulum AF*y*N (e). Quadratum autem ſemiordinatæ FD adæquat rectangulum AF*y*N (Quippe cum ſit ∺ AC.BD.AE (f), atque inſuper AE. F*y* = AC.FC (g); adeoque AE = 2F*y*, ſicuti eſt AC = 2FC, & BD = 2FD, erit quoque ∺ AF.FD.F*y* (h), & ideo (i) rectangulum AF*y*N extremarum AF, F*y* erit æquale quadrato mediæ FD). Igitur etiam quadratum ſemiordinatæ *ba* æquabit rectangulum A*be*M (k). Eodem modo demonſtrabitur, quadratum ſemiordinatæ PS æquare rectangulum ex AP in PR. Igitur quadratum &c. quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) Lib.IX.§.105.
(b) Lib.I.§.76.
(c) §.39.
(d) Lib.I.§ 77.
(e) Ibid.§.125.
(f) §.81.
(g) Lib.IX.§.59.
(h) Lib.I.§.126.
(i) Lib.IX.§.111.
(k) Lib.I.§.128.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

In ellipſi quadratum cujuſvis ſemiordinatæ ad axim deficit a rectangulo contento ſub parametro, & abſciſſa; atque hujuſmodi defectus eſt rectangulum ſimile figuræ axis.

87. Videlicet quadratum cujuſvis ſemiordinatæ *ba* ad axim AC in ellipſi ABCD minus eſt rectangulo A*bd*E contento ſub parametro AE, & ſub abſciſſa A*b*. Conſtat enim, quadratum ſemiordinatæ *ba* eſſe æquale rectangulo A*be*M, quod deficit a rectangulo A*bd*E quantitate rectanguli M*ed*E. Perſpicuum quoque eſt, rectangulum M*ed*E eſſe ſimile rectangulo ACKE (a), quod eſt figura axis AC (b). Apoll. l.1.p.13

COROLLARIUM II.

88. Hinc definiri etiam poteſt ellipſis, nulla quoque habita ratione coni: *Figura plana unica curva linea undique terminata, in qua ſemiordinatarum ad axim quadrata deficiunt a rectangulis ſibi correſpondentibus contentis ſub parametro, & ſub abſciſſis, & quidem ea conſtanti lege, ut hujuſmodi defectus ſint rectangula ſimilia figuræ axis.*

SCHOLION.

89. Ex eo, quod in ellipſi quadrata ſemiordinatarum ad axim continuo deficiant a rectangulis contentis ſub parametro, & ſub correſpondentibus abſciſſis, conica hujuſmodi ſectio *ellipſis*, nempe *deficiens*, dicta eſt.

(a) Lib. IX. §. 55. (b) §. 78.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

In ellipſi ſemiordinata ad axim eſt media proportionalis inter abſciſſam, & rectam ſibi correſpondentem contentam inter axim, & rectam regulatricem.

Fig. 18. T. XIII. 90. Etenim iiſdem poſitis, cum quadratum ſemiordinatæ *ba* adæquet rectangulum ex *Ab* in *be* (a), neceſſario erit ∺ *Ab*. *ba*. *be* (b).

THEOREMA X.

In ellipſi ABCD quadratum cujuſvis ſemiordinatæ ba *eſt duplum trapezii A*bzN, *quod ſemiparametro AN, abſciſſa A*b, *recta* bz *inter axim, & ſubdirectricem intercepta, & ſubdirectrice* Nz *continetur.*

91. Ex vertice A ad punctum *e*, in quo regulatrix EC ſecat rectam *bd*, ducatur recta A*e*.

Demonſtratio.

Fig. 18. T. XIII. Quoniam rectæ FN, CE ſunt parallelæ (c), ſicuti etiam rectæ AE, *ba* (d), quadrilaterum N*ze*E erit parallelogrammum (e); & ideo recta NE æquabit rectam *ze* (f). Eſt autem AN = NE (g). Ergo erit etiam AN = *ze* (h). Anguli autem *x*AN, *xez*, ſicuti etiam *x*NA, *xze*, utpote alterni parallelarum, ſunt æquales inter ſe (i). Ergo triangulum A*x*N erit æquale triangulo *zxe* (k); unde, ſi utrique adjiciatur trapezium A*bzx*, trapezium A*bz*N erit æquale triangulo *b*A*e* (l). Conſtat autem, rectangulum A*be*M eſſe duplum trianguli A*eb* (m). Igitur rectangulum A*be*M duplum

(a) §. 38.
(b) Lib. IX. §. 118.
(c) §. 80.
(d) §. 75.
(e) Lib. VI. §. 8.
(f) Ibid. §. 20.
(g) §. 79.
(h) Synop. Alg. §. 262.
(i) Lib. IV. §. 15.
(k) Lib. V. §. 93.
(l) Syn. Alg. §. 265.
(m) Lib. VI. §. 21.

Digitized by Google

plum quoque erit trapezii AbzN (a). Quadratum autem ſemiordinatæ *ba* adæquat rectangulum AbeM (b). Ergo etiam quadratum ſemiordinatæ *ba* erit duplum trapezii AbzN (c). Itaque in ellipſi &c. quod erat oſtendendum.

L E M M A III.

In triangulo plano rectilineo recta ducta a vertice ad baſim, in eadem proportione ſecat baſim, & rectam ipſi baſi parallelam.

92. A vertice *n* trianguli F*n*G ad baſim FG, cui ſit parallela recta *db*, ducatur quomodocunque recta *n*B. Dico, eſſe *dy*.*yb* = FB.BG.

Demonſtratio.

Cum enim in triangulo F*n*B recta *dy* poſita ſit parallela baſi FB, erit FB.*dy* = *n*B.*ny* (d). Eſt autem eadem ratione etiam BG.*yb* = *n*B.*ny*. Ergo erit FB.*dy* = BG.*yb* (e), & *alternando*, *dy*.*yb* = FB.BG (f). Itaque in triangulo &c. quod erat oſtendendum. Fig. 17. T. XIII.

C O R O L L A R I U M.

93. Si fuerit ∻ FB.BG.B*n*, erit etiam ∻ *dy*.*yb*.*yn*. Conſtat enim, eſſe *dy*.*yb* = FB.BG. Manifeſtum quoque eſt, eſſe *yb*.*yn* = BG.B*n* (g). Ergo, ſi fuerit ∻ FB.BG.B*n*, erit etiam ∻ *dy*.*yb*.*yn*.

 THEO-

(a) Lib. I. §. 102.
(b) §. 86.
(c) Lib. I. §. 102.
(d) Lib. IX. §. 59.
(e) Lib. I. §. 71.
(f) Ibid. §. 145.
(g) Lib. IX. §. 60.

Digitized by Google

THEOREMA XI.

Si in ellipſi ABCD, cujus axis ſit recta AC, parameter CH, ſubdirectrix EK, & ſemiordinata NF, fiat, ut recta MN ad ſemiordinatam NF, ita ipſa ſemiordinata NF ad rectam NL compoſitam ex abſciſſa NC, & ex ſegmento CL axi adjecto, recta LF conjungens puncta L, F erit tangens ellipſim in puncto F.

Fig. 1. T. XIV. 94. Sumto in recta LF quovis puncto *x*, ducatur ex illo ad axim AC ſemiordinata *xb*, quæ directe producta occurrat rectæ ſubdirectrici KE in puncto *a*, & jungantur puncta M, L recta ML.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi habetur ∺ MN . NF . NL, quadratum rectæ NF erit æquale rectangulo ex MN in NL (a); adeoque ſicuti rectangulum ex MN in NL eſt duplum trianguli MLN (b), ejuſdem quoque trianguli duplum erit quadratum rectæ MF (c). Quadratum autem rectæ NF eſt duplum trapezii NMKC (d). Igitur trapezium NMKC erit æquale triangulo MLN (e). Quapropter, ſublato communi trapezio M*y*CN, reliquum triangulum KM*y* erit æquale reliquo triangulo C*y*L (f); ipſumque triangulum C*y*L majus propterea erit trapezio *aey*K, ſicuti eodem trapezio majus eſt triangulum KM*y*. Unde, ſi utrique adjiciatur trapezium *ey*C*b*, triangulum *e*L*b* excedet trapezium *ab*CK (g). Rurſus cum ſit ∺ *eb* . *bx* . L*b* (h), quadratum mediæ *bx* æquabit rectangulum extremarum *eb*, L*b* (i). Conſtat autem, rectangulum ex *eb* in L*b* eſſe duplum trianguli *e*L*b* (k). Igitur ejuſdem trianguli duplum quoque erit quadratum rectæ *bx* (l).

Qua-

(a) Lib. IX. §. 111.
(b) Lib. VI. §. 21.
(c) Lib. I. §. 102.
(d) §. 91.
(e) Lib. I. §. 113.
(f) Synop. Alg. § 264.
(g) Ibidem §. 261.
(h) §. 93.
(i) Lib. IX. §. 111.
(k) Lib. VI. §. 21.
(l) Lib. I. § 102.

Digitized by Google

Quadratum autem ſemiordinatæ *bd* eſt duplum trapezii *a*KC*b* (a). Ergo quadratum rectæ ſemiordinatæ *bd* erit ad trapezium *a*KC*b*, ut eſt quadratum rectæ *bx* ad triangulum *e*L*b*. Demonſtravimus autem, trapezium *a*KC*b* deficere a triangulo *e*L*b*. Ergo etiam quadratum rectæ *bd* deficiet a quadrato rectæ *bx* (b); & ideo etiam recta *bd* erit minor recta *bx*. Itaque punctum *x* cadit extra curvam ellipticam ABCD, & eadem ratione extra eandem curvam cetera quoque puncta ejuſdem rectæ LF diverſa a puncto F reperiuntur. Recta igitur LF tangit ellipſim in puncto F (c); ac proinde ſi in ellipſi &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Recta tangens ellipſim in unico puncto ipſam tangit.

95. Oſtenſum namque eſt, omnia puncta rectæ tangentis LF diverſa a puncto F, in quo ſit contactus, extra ellipticam curvam ABCD reperiri.

COROLLARIUM II.

96. Si in axe AC ſumatur ſegmentum *z*N æquale rectæ MN, & ducatur recta *z*F, hæc erit tangenti LF perpendicularis. Quippe, cum ſit per hypotheſim ÷ MN.NF.NL, erit pariter ÷ *z*N.NF.NL; & ideo angulus *z*FL erit rectus; cum hæc ſit proprietas trianguli rectanguli (d).

DEFINITIO VIII.

97. Recta idcirco *z*F dicitur *normalis* tangenti LF, & recta *z*N *ſubnormalis*. Recta vero NL, quæ puncto concurſus L, & ſemiordinatæ NF interiicitur, *ſubtangens* nuncupatur.

CO-

(a) §. 91.
(b) Lib. I. §. 121.
(c) §. 19.
(d) Lib. IX. §. 74.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

98. In ellipſi ſemiparameter KC eſt ad ſubnormalem zN, ut eſt ſemiaxis EC ad diſtantiam EN ſemiordinatæ NF a centro E. Quandoquidem, cum ſit zN=MN, erit KC.zN =EC.EN, quemadmodum eſt KC.MN=EC.EN (a).

COROLLARIUM IV.

99. Producta ſemiordinata FN uſque ad directricem AH, ſubtangens NL erit ad abſciſſam NC, ut eſt recta NT ad rectam NM. Enimvero, cum jam ſit ÷ MN.NF.NL, rectangulum ex NM in NL erit æquale quadrato mediæ NF (b). Conſtat autem ex natura ellipſeos, rectangulum ex TN in NC eſſe æquale quadrato ejuſdem rectæ, nempe ſemiordinatæ NF (c). Ergo rectangula MN×NL, TN×NC erunt æqualia (d); ac proinde erit NL.NC=TN.NM (e).

COROLLARIUM V.

100. Hinc, ſi jungantur puncta M, C recta MC, & puncta T, L recta TL, duæ hujuſmodi rectæ MC, TL erunt
Fig. 1. T. XIV. parallelæ (f). Rurſus recta linea LT tranſibit per punctum K, in quo parameter HC bifariam a ſubdirectrice EK dividitur. Quippe, cum rectæ AH, EK (g), ſicuti etiam rectæ HC, TN (h), nec non rectæ TL, MC ſint inter ſe parallelæ, duo quadrilatera THKM, TKCM erunt parallelogramma; & ideo oppoſita ipſorum latera TM, HK, ſicuti etiam TM, KC erunt æqualia (i). Igitur duo quoque HK, KC, utpote æqualia eidem TM, erunt inter ſe æqualia (k); adeoque &c.

CO-

(a) Lib. IX. §. 59.
(b) Ibid. §. 111.
(c) §. 38.
(d) Syn. Alg. §. 259.
(e) Lib. IX. §. 114.
(f) Ibid. §. 65.
(g) §. 80.
(h) §. 75.
(i) Lib. VI. §. 20.
(k) Syn. Alg. §. 259.

COROLLARIUM VI.

101. Ex hoc ſequitur, ſemiaxim EC eſſe mediam proportionalem inter rectas EL, EN. Quippe, cum in triangulo KEL rectæ KL, MC ſint parallelæ, erit EL. EC = KE. EM (a). Eſt autem etiam EC. EN = EK. EM; cum in triangulo quoque KEC rectæ MN, KC ſint parallelæ (b). Igitur erit EL. EC = EC. EN (c), ſive ∺ EL. EC. EN.

COROLLARIUM VII.

102. Erit quoque in ellipſi AL. LC = AN. NC. Cum enim in triangulo TLA rectæ AT, EK ſint parallelæ (d), ſicuti etiam in triangulo TLN rectæ TN, KC (e), & in triangulo TNA rectæ TA, ME; perſpicuum eſt, eſſe AL. AE = TL. TK, TL. TK = NL. NC (f). Ergo erit AL. AE = NL. NC (g). Similiter cum ſit AE. AN = TM. TN, & LC. LN = TM. TN (h), erit AE. AN = LC. LN (i). Fieri igitur poſſunt duæ ſeries magnitudinum *perturbatam proportionem* habentium, videlicet

AL . AE . AN
LC . LN . NC.

Quippe conſtat ex modo demonſtratis, primam AL eſſe ad ſecundam AE in prima ſerie, ut eſt ſecunda LN ad tertiam NC in ſecunda ſerie; in iſta vero eſſe primam LC ad ſecundam LN, ut in illa eſt ſecunda AE ad tertiam AN. Igitur erit AL. AN = LC. NC (k), & *alternando*, AL. LC = AN. NC (l).

CO-

(a) Lib. IX. §. 55.
(b) §. 75.
(c) Lib. I. §. 76.
(d) §. 80.
(e) §. 75.
(f) Lib. IX. §. 57.
(g) Lib. I. §. 76.
(h) Lib. IX. §. 57.
(i) Lib. I. §. 76.
(k) Ibid. §. 181.
(l) Ibid. §. 125.

Digitized by Google

COROLLARIUM VIII.

103. Ductis poſtremo tangentibus verticalibus AP, CR occurrentibus tangenti laterali PL in punctis P,R, erit quoque PL.LR = PF.FR. Quandoquidem, cum rectæ AP, CR ſint parallelæ (a), utpote ad perpendiculum inſiſtentes axi AC (b) erit PL.RL = AL.LC (c). Ducta vero ex vertice A per punctum contactus F recta AQ occurrens tangenti CQ in puncto Q, cum anguli AFP, RFQ ſint æquales (d), ſicuti etiam anguli PAF, FQR, nec non anguli APF, PRQ (e), duo triangula AFP, RFQ, utpote æquiangula, erunt ſimilia (f). Igitur erit PF.FR = AF.FQ (g). Eſt autem AF.FQ = AN.NC (h). Ergo erit PF.FR = AN.NC (i). Conſtat autem, eſſe AL.LC = AN.NC (k). Ergo, cum jam demonſtraverimus, eſſe PL.RL = AL.LC, & PF.FR = AN.NC, erit quoque PL.RL = PF.FR (l).

THEOREMA XII.

In ellipſi ABCD, cujus axis ſit recta AC, ductis tangentibus verticalibus AP, CR, quæ tangenti laterali TL occurrant in punctis P, R, rectangulum contentum ſub ipſis tangentibus verticalibus AP, CR, erit quarta pars rectanguli figuræ ipſius axis AC.

104. Ex puncto contactus F ordinetur ad axim AC recta FT, quæ directe producta occurrat directrici AH in puncto T, & jungantur puncta T, L recta TL, nec non ex vertice A per punctum F ducatur recta AQ occurrens rectæ tangenti CQ in puncto Q, & ex vertice C per idem punctum F recta CG, quæ concurrat in puncto G cum altera tangente AP in directum producta. Recta autem CH ſit parameter axis AC.

Fig. 1. T. XIV.

Apoll. l. 3. p. 42

De-

(a) Lib. IV. §. 10.
(b) §. 24.
(c) Lib. IX. §. 57.
(d) Lib. III. §. 51.
(e) Lib. IV. §. 15.
(f) Lib. IX. §. 66.
(g) Ibidem §. 67.
(h) Ibidem §. 55.
(i) Lib. I. §. 76.
(k) Lib. IX. §. 57.
(l) Lib. I §. 76.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Cum in triangulo HAQ rectæ HQ, TF ſint parallelæ (a), erit HC.CQ=TN.NF (b). Eſt autem eadem ratione etiam KC.CR=TN.NF. Ergo erit HC.CQ=KC.CR (c), & ideo HC.KC=CQ.CR (d). Manifeſtum eſt autem, eſſe HC=2KC (e). Igitur erit itidem CQ=2CR, ſive CR=RQ, adeoque CQ=2QR. Præterea quoniam ob paralleliſmum rectarum AG, CQ, ut §. 103. demonſtravimus, anguli GAQ, AQC ſunt æquales, ſicuti etiam anguli AGC, GCQ (f), necnon anguli AFG, CFQ (g), utpote ad verticem oppoſiti, triangula AFG, CFQ erunt æquiangula, & ideo ſibi mutuo ſimilia (h), quemadmodum eandem quoque ob cauſam duo itidem triangula AFP, RFQ. Igitur erit GA.CQ=AF.FQ, ſicuti etiam PA.RQ=AF.FQ (i); atque propterea GA.CQ=PA.RQ (k); & hinc GA.PA=CQ.RQ (l). Oſtenſum porro eſt, eſſe CQ=2RQ. Ergo erit etiam GA=2PA. Ergo rectangulum ex AP in RQ, ſive in CR erit in ratione *ſubquadrupla* ad rectangulum ex AG in CQ (m). Rectangulum autem ex AG in CQ adæquat rectangulum figuræ axis AC, videlicet rectangulum ex parametro HC in ipſum axim AC. Quippe cum in triangulo ACG habeatur NF.NC=AG.AC (n) ſitque inſuper TN.NF=NF.NC (o), erit AG.AC=TN.NF (p). Demonſtravimus autem, eſſe HC.CQ=TN.NF. Ergo erit AG.AC=HC.CQ (q), & ideo AG×CQ=AC×HC (r). Quapropter ſicuti rectangulum ex AP in CR eſt in ratione *ſubquadrupla* ad rectangulum AG×CQ, in eadem quoque ratione *ſubquadrupla* erit ad rectangulum AC×HC (s). Itaque in ellipſi &c. quod erat oſtendendum.

(a) §. 75.
(b) §. 92.
(c) Lib. I. §. 76.
(d) Ibid. §. 125.
(e) §. 79.
(f) Lib. IV. §. 15.
(g) Lib. III. §. 51.
(h) Lib. IX. §. 66.
(i) Ibid. §. 67.
(k) Lib. I. §. 76.
(l) Ibidem §. 125.
(m) Lib. IX. §. 170.
(n) Ibid. §. 60.
(o) §. 90.
(p) Lib. I §. 76.
(q) Ibid. § 76.
(r) Lib. IX. §. 107.
(s) Lib. I. §. 102.

Digitized by Google

THEOREMA XIII.

Si per extrema puncta axis ellipſeos, & recta per illius centrum tranſeuntis ducantur tangentes, quæ cum illis in directum productis concurrant, fient duo triangula inter ſe æqualia.

105. Recta AC ſit axis ellipſeos ABCD, per cujus centrum M tranſeat recta EM, & ducantur per extrema puncta A, E rectæ tangentes AK, EG, quæ cum ipſis AC, EM directe productis concurrant in punctis G, K. Dico, triangula MEG, KAM, quæ hinc emerguut, eſſe æqualia.
Fig. 2. T. XIV.

Demonſtratio.

Ducta ex puncto E ſemiordinata EF ad axim AC, parallela propterea tangenti KA (a), cum duo triangula KMA, EMF ſint ſimilia (b), triangulum KMA erit ad triangulum EMF in ratione *duplicata* lateris AM ad latus FM (c). Ratio autem rectæ GM ad rectam FM eſt *duplicata* illius, quam habet recta AM ad rectam FM (d); cum ſit ∺ GM. AM. FM (e). Ergo triangulum KAM erit ad triangulum EFM, ut GM ad FM (f). Perſpicuum porro eſt, triangulum GEM eſſe ad triangulum FEM, ut eſt recta GM ad rectam FM (g), nimirum ut baſis ad baſim. Ergo triangulum GEM erit ad triangulum FEM, ut ad idem triangulum FEM ſe habet triangulum KAM (h), adeoque duo triangula GEM, KAM ſunt æqualia (i). Itaque ſi per extrema &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

106. Triangula EHK, HAG ſunt inter ſe æqualia. Quandoqui-

(a) §. 22.
(b) Lib. IX. § 65.
(c) Ibidem §. 166.
(d) Lib. I. §. 177.
(e) §. 101.
(f) Lib. I. §. 78.
(g) Lib. IX. §. 96.
(h) Lib. I. §. 76.
(i) Ibid. §. 101.

Digitized by Google

doquidem cum triangulum MEG adæquet triangulum KAM, ablato communi trapezio AHEM, reliquum triangulum EHK reliquo triangulo HAG erit æquale (a). Apoll. l. 3. p. 1.

COROLLARIUM II.

107. *Triangulum EGF adæquat trapezium KEFA.* Cum enim triangula MKA, MEG ſint æqualia, ablato communi MEF, erit reliquum EGF reliquo KEFA æquale (b). Idipſum patet, ſi utrique triangulo EKH, HGA, quæ ſunt æqualia (c), trapezium HEFA adjiciatur.

COROLLARIUM III.

108. *Ducta ab extremo A axis AC recta AN parallela tangenti EG, triangulum KNA æquabit trapezium ENAG.* Oſtenditur eodem modo, quo præcedens.

LEMMA IV.

Si fuerint tres magnitudines tribus aliis proportionales, exceſſus primæ ſupra ſecundam erit ad exceſſum ejuſdem primæ ſupra tertiam in una ſerie, ut exceſſus primæ ſupra ſecundam in altera ſerie eſt ad exceſſum ejuſdem primæ ſupra tertiam.

109. Tres magnitudines A, B, D ſint proportionales tribus a, b, d, eſto nimirum $A . B = a . b$, $B . D = b . d$. Dico, eſſe $A - B . A - D = a - b . a - d$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $A . B = a . b$, erit $A . a = B . b$ (d), adeoque $A - B . a - b = A . a$ (e). Rurſus quoniam ſtante hypotheſi habe-

(a) Synop. Alg. §. 266.
(b) Ibidem.
(c) Ibid. §. 265.
(d) Lib. I. §. 125.
(e) Ibidem §. 152.

habetur A . D = *a* . *d* (a), & ideo A . *a* = D . *d* (b), erit quoque A — D . *a* — *d* = A . *a* (c). Oſtenſum eſt autem, eſſe A—B. *a* — *b* = A. *a*. Ergo erit A— B. *a* — *b* =A—D. *a* — *d* (d), atque adeo A—B . A—D = *a* — *b* . *a* — *d* (e). Itaque ſi fuerint &c. quod erat oſtendendum.

L E M M A V.

Latera homologa triangulorum æqualium, & ſimilium ſunt æqualia.

110. Sint duo triangula æqualia, & ſimilia ABC, *abc*: Dico, latera ipſorum homologa eſſe inter ſe æqualia, nimirum AB = *ab*, BC = *bc*, & CA = *ca*.

Demonſtratio.

Fig. 3. Fig. 4. T. XIV. Cum enim ipſa triangula ſint æqualia, & ſimilia, ſibi mutuo neceſſario congruent. Igitur erit AB = *ab*, BC = *bc*, & CA = *ca* (f).

THEOREMA XIV.

Quævis recta linea tranſiens per centrum ellipſis ab illius axibus diverſa, bifariam dividit omnes rectas parallelas tangenti ductæ per illius extremum.

111. In ellipſi ABCL eſto recta quæcunque BL tranſiens per illius centrum E, diverſa ab axibus ipſius ellipſis, atque per illius extremum punctum B ducatur recta BG, quæ ellipſim tangat, & cum axe AC directe producto concurrat in puncto G. Dico, rectam BL bifariam dividere omnes rectas ductas in ipſa ellipſi parallelas tangenti BG.
Apoll. l. 1. p. 47

Demon-

(a) Lib. I. §. 179.
(b) Ibid. §. 125.
(c) Ibid. §. 152.
(d) Ibid. §. 76.
(e) Ibid. §. 125.
(f) Lib. V. §. 36.

Digitized by Google

Demonſtratio.

I.

Eſto primò recta *da* parallela tangenti BG, quæ directè producta concurrat cum axe AC in puncto P, tum per puncta *a*, B, *d* ducantur ad axim AC ſemiordinatæ *ax*, BF, *d*R parallelæ tangenti AK, quarum *d*R cadat ſupra centrum E ipſius ellipſis, rectaque *xa* producatur in *b*. Quoniam igitur rectæ KA, BF, *n*R ſunt parallelæ, triangula KEA, BEF, *n*ER erunt ſimilia (a); ac proinde triangulum KEA erit ad triangulum BE*F*, ut quadratum lateris AE ad quadratum lateris *F*E; erit vero idem BE*F* ad triangulum *n*ER, ut quadratum lateris *F*E ad quadratum lateris RE (b). Ergo etiam exceſſus trianguli KEA ſupra triangulum BE*F*, nempe trapezium KB*F*A, erit ad exceſſum ejuſdem trianguli KEA ſupra triangulum *n*ER, ſcilicet ad trapezium K*n*RA, ut exceſſus quadrati lateris AE ſupra quadratum lateris *F*E ad exceſſum ejuſdem quadrati lateris AE ſupra quadratum lateris RE (c), videlicet ut rectangulum ex A*F* in *F*C ad rectangulum ex AR in RC (d), adeoque ut quadratum ſemiordinatæ B*F* ad quadratum ſemiordinatæ *d*R (e). Eſt autem etiam triangulum BG*F* ad triangulum *d*PR, ut quadratum ſemiordinatæ B*F* ad quadratum ſemiordinatæ *d*R (f); cum hujuſmodi triangula, utpote æquiangula, quemadmodum rem attente conſideranti perſpicuum fiet, ſint ſimilia (g). Ergo triangulum quoque BG*F* erit ad triangulum P*d*R, ut trapezium KB*F*A ad trapezium K*n*RA (h). Conſtat autem, triangulum BG*F* æquare trapezium KB*F*A (i). Ergo etiam triangulum *d*PR æquabit trapezium K*n*RA (*k*). Eodem ratiocinio oſtendam, triangulum *a*P*x* æquare trapezium K*bx*A. Hinc, ſi triangulo *d*PR auferatur triangulum *a*P*x*, & | Fig. 5. T. XIV.

(a) Lib. IX. §. 65.
(b) Ibidem §. 181.
(c) §. 109.
(d) §. 49.
(e) §. 38.
(f) Lib. IX. §. 181.
(g) Ibid. §. 66.
(h) Lib. I. § 78.
(i) §. 107.
(k) Lib. I. §. 128.

& trapezio K*n*RA dematur trapezium K*bx*A; erit trapezium *dax*R æquale trapezio *bn*R*x* (a); ſique idcirco hiſce trapeziis auferatur communis figura *aen*R*x*, reliquum triangulum *bea* æquabit reliquum triangulum *den* (b). Duo autem hujuſmodi triangula ſunt ſimilia (c); cum angulus *bea* adæquet angulum *den* (d), angulus *bae* angulum *edn*, & angulus *abe* angulum *end* (e). Ergo homologa ipſorum latera *ae*, *ed* ſunt inter ſe æqualia (f). Recta igitur *da* dividitur biſariam a recta BL.

I I.

Evaneſcente triangulo *n*RE (fig. 5.) quod accidit, cum recta, ſive ſemiordinata *d*R tranſit per centrum ellipſis, duo triangula KEA, *d*PE (fig. 6.) erunt æqualia. Triangulum autem *a*P*x* adæquat trapezium K*bx*A, ut *num. præcedenti* demonſtravimus. Ergo trapezium *dax*E æquabit triangulum *xb*E (g). Quamobrem, ſublata communi figura *ae*E*x*, reliquum triangulum *bea* erit æquale reliquo triangulo *de*E (h). Iſta autem, utpote æquiangula, ſunt ſimilia (i). Ergo latera ipſorum homologa *ae*, *ed* erunt æqualia (k); adeoque recta *da* ſecta erit biſariam a recta BL.

I I I.

Quod ſi recta parallela tangenti tranſeat per extremum axis AC, quemadmodum recta AB (fig. 2.) parallela tangenti EG, & ducta ex altero illius extremo B ſemiordinata BM, occurrat iſta centro M ellipſis, perſpicuum eſt, rectam AB dividi biſariam a recta EL tranſeunte per centrum. Quippe, cum triangula KMA, BAM ſint æqualia, ablato communi triangulo ANM, reliquum KNA reliquo BNM erit æquale (l); cumque duo iſta triangula, utpote æquiangula

(a) Syn. Alg. §. 266.
(b) Ibidem §. 266.
(c) Lib. IX. §. 66.
(d) Lib. IV. §. 51.
(e) Lib. IV. §. 15.
(f) §. 110.
(g) Synop. Alg. §. 265.
(h) Ibidem §. 266.
(i) Lib. IX. §. 66.
(k) §. 110.
(l) Synop. Alg. §. 266.

Digitized by Google

gula, ſint ſimilia (a), æqualia erunt homologa ipſorum latera BN, NA (b), ſive recta AB ſecta erit bifariam a recta EL.

I V.

Spectetur recta *da* (fig. 7.), quæ ita ſe habeat in ellipſi; ut ſit parallela tangenti BG, ſed producta ad partem *a*, concurrat cum axe AC in P, & recta *dm* ſemiordinata ad ipſum axim cadat infra centrum E ipſius ellipſis. Igitur producta recta *dm* in D, cum ſit *dm* = *m*D, ſi ducatur recta DM, quæ cum ipſa D*m* conſtituat angulum *m*DM æqualem angulo P*dm*, triangulum *m*MD erit æquale triangulo *d*PM (c), ex eo nimirum quod etiam anguli *dm*A, M*m*D ſint æquales (d), atque inſuper recta DM erit parallela rectæ *d*P (e), adeoque etiam rectæ tangenti BG (f), necnon tangenti LN (g); cum tangentes BG, LN ſint parallelæ (h). Ducta propterea tangente CF, quæ concurrat cum recta BL in F, triangulum *m*MD æquabit trapezium *m*CF*n*, ut *num. I.* demonſtravimus. Quamobrem, ſi utrique adjiciatur triangulum *m*E*n*, triangulum *m*MD una cum triangulo *m*E*n* æquabit triangulum CEF (i). Triangulum autem KEA adæquat triangulum ECF (*k*), & triangulum *m*MD poſitum eſt æquale triangulo *d*P*m*. Ergo triangulum quoque *d*P*m* una cum triangulo *m*E*n* æquabit triangulum KEA. Oſtenſum eſt autem *num. I.* triangulum *a*P*x* æquare trapezium K*bx*A. Ergo, his ſublatis, trapezium *xadm* una cum triangulo *m*E*n* erit æquale triangulo *b*E*x* (l), demtoque communi *xae*E, triangulum *bea* æquabit triangulum *den* (m). Duo autem hujuſmodi triangula ſunt ſimilia (n); cum ſint æquiangula. Ergo æqualia inter ſe erunt homologa ipſorum latera *de*, *ea* (o); ac proinde recta *da* ſecta erit bifariam in puncto *e* a recta BL.

Sit

(a) Lib. IX. §. 66.
(b) §. 110.
(c) Lib. V. §. 94.
(d) Lib. III §. 51.
(e) Lib. IV. §. 12.
(f) Ibid. §. 18.
(g) Ibid. §. 18.
(h) §. 63.
(i) *Synop. Alg.* §. 265.
(k) §. 74.
(l) Syn. Alg. §. 266.
(m) Ibidem.
(n) Lib. IX. §. 66.
(o) § 116.

V.

Sit modo recta AD (fig. 5.), quæ occurrat extremo puncto A axis AC; ſemiordinata vero D*m* ad ipſum axim ducta ex altero extremo D rectæ AD, infra centrum E ipſius ellipſis itidem cadat. Eodem ratiocinio, quo *num. præcedenti* oſtenſum eſt, triangulum *d*P*m* (fig. 7.) una cum triangulo *m*E*n* æquare triangulum KEA, demonſtrabitur, triangulum DA*m* (fig. 5.) una cum triangulo *m*E*t* æquare triangulum KEA. Igitur, ſublato communi triangulo A*s*E, reſiduum triangulum D*st* æquabit triangulum K*s*A (a), quod itidem relinquitur. Cumque iſta triangula D*st*, K*s*A, utpote æquiangula ſint ſimilia, habebunt latera homologa A*s*, *s*D inter ſe æqualia (b), adeoque etiam in hoc caſu recta DA ſecta erit biſariam a recta BL.

VI.

Nunc recta, quæ ſecatur a recta per centrum tranſeunte, ita ſe habeat in ellipſi, ut ipſius axim diſpeſcat, eſto nimirum recta FD (fig. 8.) diviſa a recta BL tranſeunte per centrum E ellipſis FCM, ſitque ipſa FD parallela tangenti BA, atque ex illius extremo F ducatur ad axim *a*C ſemiordinata F*n*, quæ ſupra centrum E ipſius ellipſis cadat. Ducta igitur ab extremo D recta D*b* parallela ſemiordinatæ F*n*, ſicuti etiam tangenti H*a*, & per punctum *z* recta *zd* parallela tangenti BA, ut ſupra, eodem plane ratiocinio demonſtrabitur, triangulum F*un* æquare trapezium H*mna*, quo *num. 1.* oſtenſum eſt, triangulum *d*PR (fig. 5.) æquare trapezium K*n*RA. Igitur, ſublato communi trapezio *uymn*, triangulum F*ym* æquabit trapezium *byue* (c). Triangulum autem *eu*D eſt æquale trapezio H*bea*; cum triangulum *eu*D adæquet triangulum *zde* (d), ob æqualitatem ſcilicet baſium

(a) Syn. Alg. §. 266.
(b) §. 110.
(c) Syn. Alg. §. 266.
(d) Lib. V. §. 94.

ſium ze, eD (a), nec non angulorum zed, Deu (b), & dze, eDu (c), ipſumque triangulum zde trapezio $Hbea$, ut *num.I.* demonſtravimus, ſit æquale. Ergo triangulum bDy erit æquale trapezio $Hyua$; adeoque etiam triangulo Fym (d), quod trapezium ipſum $Hyua$ adæquat. Duo autem triangula bDy, Fym, utpote æquiangula, ſunt ſimilia. Ergo æqualia erunt inter ſe homologa ipſorum latera Fy, yD; rectaque idcirco FD a recta bL biſariam dividitur.

V I I.

Ab eadem recta bL (fig. 8.) ſecta ſit recta NM, ex cujus extremo M ducta ſemiordinata ME ad axim aC, tranſeat ipſa per centrum E ipſius ellipſis. Ex altero illius rectæ extremo N ducatur ordinata Nb ad axim aC, & poſita PK = PR, ductaque recta Kb, conſtituatur triangulum PKb. Igitur, quemadmodum triangulum Fun adæquat trapezium $Hmna$, ita, ſi evaneſcat triangulum mEn, tranſeunte nimirum recta Fn per centrum E, ſicuti per ipſum tranſit recta EM, triangulum RME æquabit triangulum ECS. Quamobrem, demto communi triangulo RGE, reſiduum triangulum EGM erit æquale reſiduo trapezio GRCS (e). Triangulum autem RNP adæquat trapezium $PCSx$, utpote æquale triangulo KbP (ſicuti *num. præcedenti* oſtenſum eſt de triangulis zde, euD) cui trapezium ipſum $PCSx$ eſt æquale (f). Ergo, ſublato trapezio $PCSx$ a trapezio GRCS, additoque triangulo RNP ipſi reſiduo $RPxG$, triangulum GNx æquabit trapezium RCSG; ac proinde etiam triangulum EGM (g). Sunt autem duo iſta triangula ſibi mutuo ſimilia; cum ſint æquiangula. Igitur æqualia erunt latera ipſorum homologa NG, GM; adeoque &c.

(a) §. 17.
(b) Lib.III. §. 51.
(c) Lib.IV §. 15.
(d) Syn.Alg. §. 261.
(e) Ibid. §. 266.
(f) §. 107.
(g) Syn Alg. §. 261.

Digitized by Google

VIII.

Poſtremo eſto recta *d*D (fig. 9.) ſecta a recta BL, eaque ita ſe habeat in ellipſi, ut ſemiordinata *dm* ad axim AC cadat infra centrum E. Ductis itaque rectis, ut ſupra, prout figura oſtendit, triangulum *m*MQ erit æquiangulum triangulo *d*R*m*, adeoque illi æquale ob æqualitatem ſemiordinatarum, ſive baſium *dm*, *m*Q. Quoniam igitur triangulum *m*MQ adæquat trapezium *m*CF*n*, quemadmodum (fig. 7.) triangulum *m*MD adæquat trapezium *m*CF*n* ex *n. IV.*, triangulum quoque *d*R*m* eidem trapezio *m*CF*n* erit æquale (a): Quamobrem, ſi utrique adjiciatur triangulum *m*E*n*, figura *d*RE*nd* æquabit triangulum ECF (b). Triangulum autem KEA eſt æquale triangulo ECF (c). Ergo figura *d*RE*nd* etiam triangulo KEA erit æqualis (d). Hinc, demto utrique triangulo *e*RE, triangulum *den* æquabit trapezium K*e*RA (e): Triangulum porro *x*RD adæquat trapezium K*bx*A, ſi cuti ex *num. præcedenti* triangulum NRP (fig. 8.) eſt æquale trapezio PCS*x*. Ergo, addito utrique trapezio *bx*R*e*, triangulum *b*D*e* æquale erit trapezio K*e*RA (f); adeoque etiam triangulo *den* (g). Cumque duo hujuſmodi triangula *b*D*e*, *den*, utpote æquiangula, ſint ſimilia, æqualia erunt latera ipſorum homologa *de*, *e*D; ac proinde recta *d*D ſecta eſt bifariam in puncto *e* a recta BL, Igitur recta quæcunque tranſiens per centrum ellipſis diverſa ab illius axibus &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

In ellipſi recta quæcunque diverſa ab axibus tranſiens per illius centrum eſt diameter ſecundaria.

112. Bifariam ſiquidem dividit omnes rectas parallelas tan-

(a) Syn. Alg. §. 261.
(b) Ibid. §. 265.
(c) §. 74.
(d) Syn. Alg. §. 261.
(e) Ibid. §. 266.
(f) Ibid. §. 265.
(g) Ibid. §. 261.

Digitized by Google

tangenti ductæ per illius extremum, prout requiritur, ut ellipſeos diameter dici queat (a). Hinc

COROLLARIUM II.

Axis major ellipſeos eſt omnium diametrorum maxima, minima vero axis minor.

113. Videlicet axis major AC ellipſis ABCD eſt maxima omnium diametrorum. Quippe eſt maxima omnium rectarum, quæ per ellipſeos centrum tranſeunt. Deſcripto enim circulo AECF circa ipſum axim, ductaque per centrum M recta quacunque *bm*, cum tota peripheria circuli extra curvam ellipticam reperiatur (b), recta quoque *bm* extra eandem curvam excurret. Quamobrem recta *bm* major erit diametro *ny*. Eſt autem AC=*bm* (c). Ergo axis quoque AC erit major diametro *ny*, & eadem ratione omnes alias diametros axis ipſe AC excedet. Eodem ratiocinio palam fiet, minorem axim AC ellipſis ABCD eſſe minimam omnium diametrorum ejuſdem. Quandoquidem ducta diametro *yb*, deſcriptoque circa minorem axim AC circulo AECF, cum tota ipſius circuli peripheria cadat intra curvam ellipticam (d), ſitque propterea $zx < yb$, erit etiam $AC < yb$, ex eo nimirum quod ſit $AC = xz$ (e). Fig. 15. Fig. 16. T. XIII.

COROLLARIUM III.

Tam diametri, quam ſemidiametri ellipſeos eo minores ſunt, quo magis a majori ipſius axe recedunt.

114. Etenim quo magis recedunt a majori axe, recedunt magis a maxima diametro, & accedunt ad minimam.

H 2 SCHO-

(a) §. 11.
(b) §. 54.
(c) Lib. VII. §. 11.
(d) §. 54.
(e) Lib. VII. §. 11.

SCHOLION.

115. Hinc patet diſcrimen maximum ellipſeos a circulo. Omnes namque diametri in circulo ſunt æquales inter ſe; minime vero in ellipſi, idque profecto ex eo, quod quadrata ſemiordinatarum ad axim in ellipſi non ſint, quemadmodum in circulo, æqualia rectangulis, quæ ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis continentur.

THEOREMA XV.

Quadrata ſemiordinatarum ad quamlibet ſecundariam diametrum ellipſeos ſunt directe inter ſe, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus portionibus ipſius diametri.

116. Recta BL ſit una ex diametris ſecundariis ellipſeos
Fig. 6. T. XIV. ABCL, ejuſque axis AC. Ducantur autem ad ipſam diametrum BL ſemiordinatæ *ea*, MA, *n*D. Dico, quadratum ſemiordinatæ *ea* eſſe ad quadratum ſemiordinatæ MA, ut rectangulum ex B*e* in *e*L ad rectangulum ex BM in ML. Quadratum quoque ſemiordinatæ MA eſſe ad quadratum ſemiordinatæ *n*D, ut eſt rectangulum ex BM in ML ad rectangulum ex B*n* in *n*L.

Demonſtratio.

Per extrema puncta B, A diametrorum BL, AC ducantur tangentes BG, AK, quæ cum ipſis concurrant in punctis K, G, & per punctum *a* ducatur recta *bx* parallela tangenti KA. Quoniam igitur, ut §. 111. *num. I.* demonſtravimus, triangulum *a*P*x* adæquat trapezium K*bx*A, ſi utrique dematur commune trapezium *zax*A, reſiduum triangulum *z*AP erit æquale reſiduo trapezio K*baz* (a); quibus ſi

(a) Syn. Alg. §. 266.

ſi addatur trapezium HzPG, triangulum HAG erit æquale duobus trapeziis K*baz*, HzPG (a). Triangulum autem BHK adæquat triangulum HAG (b). Ergo triangulum quoque BHK æquabit duo trapezia K*baz*, HzPG (c); ac proinde, ſi trapezium K*by*H auferatur trapezio K*baz*, nec non triangulo BHK; trapezium vero, quod ex illa ſubductione relinquitur, nempe H*yaz*, adjiciatur trapezio HzPG, triangulum B*by* erit æquale toti trapezio G*ya*P; his autem addito trapezio B*yae*, triangulum *bae* æquabit trapezium GB*e*P (d). Conſtat porro, triangulum AMK æquare trapezium BMAG (e). Ergo triangulum *bae* erit ad triangulum AMK, ut eſt trapezium GB*e*P ad trapezium BMAG. Duo autem illa triangula, utpote æquiangula, ſunt ſimilia (f), adeoque ſunt inter ſe, ut quadrata ſuorum laterum homologorum *ea*, MA (g). Ergo quadratum ſemiordinatæ *ea* erit ad quadratum ſemiordinatæ MA, ut eſt trapezium GB*e*P ad trapezium GBMA (h), nempe ut exceſſus trianguli BEG ſupra triangulum *e*PE ad exceſſum ejuſdem trianguli BEG ſupra triangulum MAE. Hujuſmodi autem exceſſus ſunt directe inter ſe, ut exceſſus quadrati lateris BE ſupra quadratum lateris *e*E ad exceſſum quadrati ejuſdem lateris BE ſupra quadratum lateris ME (i); cum ob paralleliſmum rectarum BG, *e*P, MA triangula BGE, *e*PE, MAE ſint ſimilia (*k*), adeoque proportionalia quadratis laterum BE, *e*E, ME (l). Ergo etiam quadratum lateris, ſeu ſemiordinatæ *ea* erit ad quadratum ſemiordinatæ MA, ut eſt exceſſus quadrati lateris BE ſupra quadratum lateris *e*E ad exceſſum quadrati ejuſdem lateris BE ſupra quadratum lateris ME (m), videlicet ut rectangulum ex B*e* in *e*L ad rectangulum ex BM in ML (n).

Rurſus ducta per extremum D ſemiordinatæ *n*D recta D*a* ordinata ad axim AC, parallela tangenti AK, eaque produ-

cta

(a) Syn. Alg. §. 265.
(b) §. 106.
(c) Syn. Alg. §. 261.
(d) Ibid. §. 266.
(e) §. 108.
(f) Lib. IX. §. 66.
(g) Ibid. §. 181.
(h) Lib. I. §. 78.
(i) §. 109.
(k) Lib. IX. §. 65.
(l) Ibid. § 181.
(m) Lib. I. §. 78.
(n) §. 49.

Digitized by Google

ѐta in *b*, nec non per punctum *a* ducta recta *e*P parallela tangenti BG, cum rectæ *ax*, *x*D ſint æquales; ſicuti etiam anguli *ax*P, D*xm* (a), nec non anguli *xa*P, *x*D*m* (b), duo triangula *a*P*x*, *xm*D erunt æqualia (c). Quamobrem, ſi utrique adjiciatur idem ſpatium *xaenmx*, trapezium P*enm* æquabit trapezium D*aen* (d); his vero addito triangulo *aeb*, trapezium P*enm* una cum triangulo *aeb* erit æquale triangulo D*bn*. Oſtenſum eſt autem, triangulum *bae* eſſe æquale trapezio B*e*PG, ut proinde trapezium B*nm*G adæquet trapezium P*enm* una cum triangulo *aeb* (e). Ergo triangulum quoque D*bn* æquabit trapezium GB*nm* (f). Demonſtravimus autem, triangulum KMA eſſe æquale trapezio BMAG. Igitur triangulum KMA erit ad triangulum *bn*D ſibi ſimile (g), utpote ſibi æquiangulum, ut eſt trapezium GBMA ad trapezium GB*nm*, nempe ut exceſſus trianguli GBE ſupra triangulum AME ad exceſſum ejuſdem trianguli BEG ſupra triangulum *mn*E; ac proinde ut exceſſus quadrati lateris BE ſupra quadratum lateris ME ad exceſſum ejuſdem quadrati lateris BE ſupra quadratum lateris *n*E (h), videlicet ut rectangulum ex BM in ML ad rectangulum ex B*n* in *n*L (i). Ergo quadrata ſemiordinatarum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Quadrata ordinatarum ad quamlibet ſecundariam diametrum ellipſeos ſunt directe inter ſe, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus portionibus ipſius diametri.

117. Quadrata namque *ordinatarum* ſunt inter ſe, ut quadrata *ſemiordinatarum* (k); cum ordinatæ ad diametrum ſint directe inter ſe, ut ſemiordinatæ ad eandem (l).

COROL-

(a) Lib. III §. 51.
(b) Lib. IV. §. 15.
(c) Lib. V. §. 94.
(d) Syn. Alg. §. 265.
(e) Ibidem.
(f) Ibidem §. 262.
(g) Lib. IX. §. 66.
(h) §. 109.
(i) §. 49.
(k) Lib I. § 118.
(l) Ibid. §. 127.

COROLLARIUM II.

Tam ordinatæ, quam ſemiordinatæ ad quamlibet ſecundariam diametrum ellipſis æqualiter diſtantes a ſuo vertice reſpective, aut a centro, ſunt æquales.

118. Demonſtratur eodem modo, quo §.§. 43. 44. 45. idipſum oſtenſum eſt de *ordinatis*, & *ſemiordinatis* ad majorem axim.

COROLLARIUM III.

Si diametri conjugatæ ellipſeos fuerint æquales, quadrata ſemiordinatarum erunt æqualia rectangulis, quæ ſub correſpondentibus portionibus ipſius diametri continentur.

119. Ut ſi diametri conjugatæ AB, *ed* ellipſeos A*e*D fuerint æquales, quadratum cujuſvis ſemiordinatæ *mb* æquabit rectangulum ex A*m* in *m*B. Etenim, cum quadratum ſemiordinatæ *mb* ſit ad quadratum ſemiordinatæ *nd*, ut rectangulum ex A*m* in *m*B ad rectangulum ex A*n* in *n*B (a), ſicuti propter hypotheſim quadratum ſemiordinatæ *nd* adæquat rectangulum ex A*n* in *n*B, ita quadratum ſemiordinatæ *mb* æquabit rectangulum ex A*m* in *m*B (b). Fig. 9. T. XIII.

SCHOLION.

120. Quamvis ergo quadrata ſemiordinatarum ad axim tam majorem, quam minorem ellipſeos non ſint æqualia rectangulis, quæ ſub correſpondentibus portionibus ipſorum axium continentur, id tamen verum univerſaliter non eſt de quadratis ſemiordinatarum ad quamlibet diametrum.

CO-

(a) §. 116. (b) Lib. I. §. 128.

Digitized by Google

COROLLARIUM IV.

Quadrata ſemiordinatarum ad quamlibet ſecundariam diametrum ellipſeos habent omnia eandem rationem ad rectangula, quæ ſub correſpondentibus portionibus ipſius diametri continentur.

121. Demonſtratur eodem modo, quo §. 56. idipſum oſtenſum eſt de quadratis ſemiordinatarum ad axim.

SCHOLION.

122. *Parameter* propterea cujuſvis ſecundariæ diametri ellipſeos eſt *recta ducta per verticem ipſius diametri, ejus ordinatis parallela, & ideo ellipſim tangens, cujus ratio ad ipſam diametrum eadem eſt cum illa, quam habet quadratum cujuslibet ſemiordinatæ ad rectangulum contentum ſub correſpondentibus portionibus ipſius diametri*. Quæcumque idcirco ſuperiori loco oſtenſa ſunt de *parametro* axis, intelligi etiam debent de *parametro* alterius cujuſvis diametri ſecundariæ, ſi ad ſibi conjugatam diameter ipſa referatur, videlicet

I.

123. *Quævis ſecundaria diameter ellipſeos eſt media proportionalis inter diametrum ſibi conjugatam, ejuſque parametrum.*
Fig. 10. T. XIV. Ut ſi recta AB in ellipſi ADBC fuerit diameter conjugata diametro CD, cujus *parameter* ſit recta CF, erit ∺ CD. AB. CF. (a).

II.

124. *Quadratum cujuſvis diametri ſecundariæ adæquat rectangulum contentum ſub diametro illi conjugata, & ſub illius parametro* (b).

COROL-

(a) §. 81. (b) §. 82.

Digitized by Google

III.

125. *Quadratum vero ſemidiametri ſecundariæ eſt quarta pars rectanguli contenti ſub diametro ſibi conjugata, & ſub illius parametro* (a).

IV.

126. *Conjugatæ diametri ellipſeos ſunt duæ mediæ continuè proportionales inter ſuos parametros.* Si nimirum rectæ AB, CD fuerint diametri conjugatæ ellipſeos ADBC, & earum parametri rectæ AE, CF, erit ∺ AE.CD.AB.CF (b).

V.

127. Hinc; *ſi diametri conjugatæ fuerint æquales; etiam earum parametri erunt æquales tum inter ſe, tum cum ipſis diametris. Inæquales vero, ſi diametri fuerint inæquales.*

VI.

128. *Similiter ex diametris conjugatis illa, quæ major eſt, habet parametrum tum ſeipſa, tum altera diametro minorem. Illa vero, quæ eſt minor, habet parametrum etiam altera diametro majorem.* Hinc

VII.

129. Cum axes ellipſeos ſint diametri conjugatæ (c), & axis major ſit omnium diametrorum maxima; minima vero axis minor (d), *parameter axis majoris erit minimus omnium parametrorum aliarum diametrorum ellipſis, omnium vero maximus parameter axis minoris.*

(a) §. 83. (b) §. 84. (c) §. 32. (d) §. 113.

Digitized by Google

VIII.

130. Quoniam autem diametri ſecundariæ in ellipſi eo ſunt minores, quo magis a majori axe recedunt (a), *parameter diametri ſecundariæ major erit, quo diameter ipſa remotior a majori axe, & minori proximior efficitur.*

THEOREMA XVI.

Omnis diameter ellipſim biſariam dividit; quadriſariam vero diametri conjugatæ; & ſectores elliptici ad verticem oppoſiti inter ſe ſunt æquales.

I.

131. Recta CD ſit diameter quæcunque ellipſis CADB: Dico, ellipſim CADB ab ipſa diametro CD biſariam dividi.

Demonſtratio.

Per ſingula puncta ipſius diametri ducantur ordinatæ
Fig. 10. T. XIV. XZ, MN, AB, *mn*, *xz*, quæ diviſæ erunt biſariam in punctis *a*, *b*, G, *d*, *e* (b). Igitur elementa componentia ſegmentum ellipticum DCA ſunt numero, & magnitudine æqualia elementis conſtituentibus ſegmentum ellipticum CDB: Ergo elliptica hujuſmodi ſegmenta ſunt æqualia (c); adeoque &c.

II.

132. Rectæ AB, CD ſint diametri conjugatæ ellipſeos CADB. Dico, ellipſim CADB dividi quadriſariam ab ipſis diametris.

Demon-

(a) §. 114. (b) §. 15. (c) Lib. IX. §. 53.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Etenim, iiſdem poſitis, cum diameter AB ſit una ex ordinatis ad diametrum CD (a), ſintque omnes ordinatæ ad diametrum CD bifariam diviſæ (b), ſector AGC æquabit ſectorem CGB, & ſector AGD ſectorem BGD (c), ex eo nimirum, quod eorum elementa ſint numero, & magnitudine æqualia. Æquales ſunt autem eandem quoque ob cauſam etiam ſectores AGC, AGD, nec non ſectores CGB, BGD; cum ſit $bM = dm$, $aX = ex$, $bN = dn$, & $aZ = ez$ (d), ob æqualem harum ſemiordinatarum diſtantiam a centro, totque puncta ſint in recta GC, quot ſunt in recta GD (e). Ergo quatuor ſectores AGC, AGD, CGB, BGD ſunt inter ſe æquales; ac proinde &c.

III.

133. Rectæ AB, CD ſint duæ quæcunque diametri ellipſeos ADBC. Dico, ſectores ad verticem oppoſitos AGC, DGB, ſicuti etiam AGD, CGB, eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Segmentum ellipticum DCA adæquat ſegmentum ABD; cum utrumque ſit medietas ipſius ellipſis (f). Ergo, ablato communi AGD, reliquum AGC erit reliquo DGB æquale (g). Eodem modo oſtendam, ſectorem AGD æquare ſectorem CGB. Igitur omnis diameter &c. quod erat oſtendendum.

(a) §. 71.
(b) §. 17.
(d) Lib. IX. §. 53.
(e) §. 118.
(e) §. 68.
(f) §. 131.
(g) Synop. Alg. § 266.

Digitized by Google

THEOREMA XVII.

Si ex punctis extremis cujuſvis diametri ellipſeos ducantur intra ellipſim duæ rectæ parallelæ, illæ æquales erunt inter ſe, & recta illas conjungens erit diameter ipſius ellipſis.

Fig. 17. T. XIII. Recta *ab* ſit diameter ellipſis ACBD, atque ex illius extremis punctis *a*, *b* ducantur intra ellipſim rectæ parallelæ *ae*, *bd*, quarum extrema *d*, *e* jungantur recta *de*.

I.

134. Dico primo, rectas *ae*, *bd* eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Quoniam rectæ *ae*, *bd* ſunt parallelæ, erunt ordinatæ ad aliquam diametrum ipſius ellipſis. Sit ergo hujuſmodi diameter recta AB. Itaque cum rectæ *ae*, *bd* ſint parallelæ, anguli *eab*, *abd* erunt æquales (a). Æquales ſunt autem etiam anguli *anz*, *ynb* (b). Igitur duo triangula *nza*, *nby* habent duos angulos duobus angulis æquales, alterum alteri. Habent porro etiam latera *an*, *nb* æqualia, quæ æqualibus angulis adjacent (c). Ergo latera quoque *az*, *yb* erunt æqualia (d). Conſtat porro, eſſe $ae . db = az , by$ (e); cum ſit $ae = 2az$, & $db = 2yb$ (f). Ergo etiam rectæ *ae*, *db* erunt inter ſe æquales (g).

II.

135. Dico 2. rectam *de* eſſe diametrum ellipſeos ACBD.

Demon-

(a) Lib. IV. §. 15.
(b) Lib. III. §. 51.
(c) §. 61.
(d) Lib. V. §. 93.
(e) Lib. I. §. 127.
(f) §. 17.
(g) Lib. I. §. 121.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Quandoquidem recta conjungens extrema puncta *d*, *e* rectarum *db*, *ae* tranſit per centrum *n* ellipſis ACBD. Etenim, ſi fieri poteſt, cadat hujuſmodi recta extra centrum *n*, ut linea *dxe*. A centro autem *n* ad extrema puncta *d*, *e* ducantur rectæ *nd*, *ne*. Cum igitur ob paralleliſmum rectarum *ae*, *db* anguli alterni *eab*, *abd* ſint æquales (a), ſicuti etiam rectæ *an*, *nb* (b), nec non rectæ *ae*, *db* (c), baſes quoque *ne*, *nd* triangulorum *nae*, *nbd* erunt æquales (d). Duo ergo triangula *nae*, *nbd* ſunt inter ſe mutuo æquilatera; ac propterea habent angulos *ane*, *dnb* æqualibus lateribus *ae*, *db* oppoſitos, inter ſe æquales (e). Igitur duæ rectæ *nd*, *ne* ſunt in directum poſitæ, ſeu unam rectam *dne* conſtituunt (f). Poſita eſt autem recta etiam linea *dxe*. Ergo duæ rectæ *dxe*, *dne* ſpatium claudunt, quod repugnat (g). Igitur recta conjungens extrema puncta *d*, *e* tranſit per centrum ellipſis ACBD; ac proinde eſt illius diameter (h). Si ergo ex punctis extremis &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XVIII.

Si in majori axe AC ellipſeos AMNC duo ſumantur puncta a, b, *quorum ea ſit diſtantia a ſuo reſpective vertice A, C, ut tam rectangulum ex A*a *in* a*C, quam rectangulum ex C*b *in* b*A ſit æquale quadranti figuræ ipſius axis AC, rectæ* az, bz *ductæ ex illis punctis* a, b *ad quodvis punctum* z *curvæ ellipticæ, æquales angulos* azE, bzF *conſtituunt cum recta tangente EF per illud punctum* z *traducta.*

136. Ducantur tangentes verticales AE, CF occurrentes tan-

(a) Lib. IV. §. 25.
(b) § 68.
(c) §. 118.
(d) Lib. V. §. 71.
(e) Ibid §. 25.
(f) Lib III. § 55.
(g) Lib. IV. §. 7.
(h) §. 112.

Fig. 11. T. XIV. Apoll. l.3.p.48 tangenti laterali EF in punctis E, F. Ipſa vero EF, ſicuti etiam axis AC directe producantur, donec ſimul in puncto D concurrant. Tum ex datis punctis *a*, *b* ducantur ad puncta E, F rectæ *a*E, *a*F, *b*E, *b*F.

Demonſtratio.

Quoniam igitur ex facta hypotheſi rectangulum ex A*a* in *a*C eſt æquale quadranti figuræ axis AC; eidem vero quadranti æquale itidem ſit rectangulum ex AE in CF (a), rectangula $CF \times AE$, $aC \times Aa$ erunt inter ſe æqualia (b); & hinc habebitur $CF . aC = Aa . AE$ (c). Duo autem anguli *a*CF, *a*AE ſunt æquales inter ſe (d), utpote recti (e). Ergo duo triangula *a*CF, *a*AE erunt ſimilia (f), & anguli C*a*F, AE*a*, qui proportionalibus lateribus continentur, erunt æquales (g). Duo autem anguli A*a*E, *a*EA valent unum rectum (h). Igitur duo quoque anguli C*a*F, A*a*E ſimul ſumti unum rectum æquabunt (i). Tres porro anguli A*a*E, E*a*F, C*a*F conficiunt ſummam duorum rectorum (*k*). Igitur, ſublatis angulis A*a*E, C*a*F unum rectum æquantibus, reliquus E*a*F erit uni recto æqualis, ſeu erit rectus. Haud diſſimili ratiocinio palam fiet, etiam angulum E*b*F eſſe rectum. Igitur, cum angulus rectus in ſemicirculo conſiſtat (l), bifariam diviſo latere EF in puncto *y*, ſemicirculus deſcriptus centro *y*, intervallo *y*E tranſibit per puncta *a*, *b*, ut ſemicirculus E*ab*F; ac proinde anguli A*b*E, *a*FE, utpote in eadem circuli portione conſiſtentes, erunt inter ſe æquales (m).

Modo per punctum E ducatur recta *de* parallela rectæ *b*F, quæ concurrat in puncto *e* cum recta *bz* directe producta, occurrat vero rectæ DC in puncto *d*. Cum itaque anguli *e*E*z*, *z*F*b*, ſicuti etiam anguli E*ez*, *zb*F, ſint æquales (n), quatenus ſunt alterni; æquales itidem ſint anguli ad verticem

(a) §. 104.
(b) Synop. Alg. §. 259.
(c) Lib. IX. §. 114.
(d) Lib III. §. 37.
(e) §. 24.
(f) Lib. IX. §. 69.
(g) Ibidem §. 1.
(h) Lib. V. §. 47.
(i) Ibid. §. 40.
(k) Lib. III. §. 42.
(l) Lib. VII. §. 78.
(m) Ibidem §. 73.
(n) Lib. IV. § 15.

Digitized by Google

tem oppoſiti E*ze*, *bz*F (a), duo triangula E*ze*, *zb*F erunt ſimilia (b); ac proinde habebitur *b*F.E*e*=Fz.zE (c). Manifeſtum eſt autem, eſſe Fz.zE=FD.ED (d), & *b*F.*d*E = FD.DE (e). Ergo erit *b*F.E*e*=*b*F.*d*E (f), & ideo E*e* = *d*E (g). Angulus autem *d*E*b* eſt rectus; cum ſit æqualis angulo alterno E*b*F (h), qui itidem eſt rectus, ut ſupra demonſtravimus. Ergo angulus quoque *e*E*b* erit rectus, duoque idcirco triangula *b*E*d*, E*be* ita erunt æqualia, ut angulus E*be*, ſive E*bz*, adæquet angulum *db*E, ſeu *ab*E (i); & ideo, cum oſtenſum fuerit, angulum *a*Fz æquare angulum *ab*E, angulus *a*Fz angulo itidem E*bz* erit æqualis (*k*). Conſtat porro, æquales angulos in eadem circuli portione conſiſtere (l). Igitur in eadem circuli portione erunt anguli *a*Fz, E*be*, ſive *xbz*; adeoque deſcribi poterit circulus z*xb*F tranſiens per puncta z, *x*, *b*, F; proinde circumſcribens quadrilaterum z*xb*F. Omnis autem quadrilateri circulo inſcripti duo quilibet oppoſiti anguli valent duos rectos (m). Ergo duo anguli *xb*F, *x*zF quadrilateri z*xb*F erunt æquales duobus rectis; cumque angulus *xb*F jam oſtenſus ſit rectus, rectus ſimiliter erit angulus *x*zF; atque adeo etiam angulus *x*zE, quod duo *x*zF, *x*zE ſimul ſumti valeant duos rectos (n). Recta igitur *x*z ad perpendiculum inſiſtit rectæ tangenti DF (o).

Rurſus quoniam etiam in quadrilatero *ax*zE duo oppoſiti anguli E*ax*, *x*zE ſunt recti, circulus ei circumſcribi poterit circa latus E*x*, qui nimirum tranſeat per quatuor puncta *a*, *x*, z, E, quemadmodum circulus z*xb*F tranſit eandem ob cauſam per quatuor puncta z, *x*, *b*, F quadrilateri z*xb*F. Igitur duo anguli *ax*E, *a*zE, utpote in eadem portione *ax*zE circuli E*ax*z conſiſtentes, erunt inter ſe æquales (p). Eadem ratione æquales erunt inter ſe duo itidem anguli *bx*F, *b*zF, quatenus nempe etiam ipſi reperiuntur in eadem portione *bx*zF

(a) Lib.III §.51.
(b) Lib.IX. §. 66.
(c) Ibidem §. 67. 77.
(d) §. 103.
(e) Lib.IX §.59.
(f) Lib. I. §. 76.
(g) Ibidem §. 103.
(h) Lib.IV. §. 15.
(i) Lib. V. §. 82.
(k) Synop.Alg.§.263.
(l) Lib.VII. §.73.
(m) Ibid. §.82.
(n) Lib. III. §.40.
(o) Ibidem §.24.
(p) Lib.VII.§.73.

Digitized by Google

bxzF circuli *bFzx*. Duo autem anguli *axE*, *bxF* ſunt inter ſe æquales (a). Ergo æquales erunt inter ſe duo itidem *azE*, *bzF* (b). Itaque ſi in majori axe &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

137. Hinc omnes luminis radii incidentes ex puncto *b* in curvam ellipticam ANC, ut radii *b*N, *b*M, ita ex illa reſiliunt, ut in puncto *a* omnes ſimul colligantur. Similiter omnes, qui ex puncto *a* erumpentes, incidunt in eandem curvam, viciſſim in puncto *b* omnes ſimul poſt reflexionem uniuntur. Enimvero, cum ex *Catoptrica* reflexio luminis ex ſpeculi ſuperficie ea lege perpetuo fiat, ut angulus reflexionis ſit æqualis angulo incidentiæ, & hujuſmodi anguli ſpectentur in curva ſuperficie penes rectam tangentem curvam ipſam ſuperficiem in puncto incidentiæ, res perſpecta eſt, omnes radios luminis, qui ex puncto *b* incidunt in curvam ellipticam ANC, reflecti ex illa non poſſe, quin omnes tranſeant per punctum *a*, & viciſſim quin tranſeant per punctum *b*, qui ex puncto *a* in eandem curvam cadunt. Ductis namque tangentibus *zu*, *mn* per puncta incidentiæ N, M, conſtat, angulos *b*N*u*, *a*Nz, ſicuti etiam *a*M*m*, *b*M*n*, eſſe inter ſe æquales. Duo igitur puncta *a*, *b* ſunt *foci*, ſive *umbilici* ellipſeos ANC (c).

COROLLARIUM II.

138. Quamobrem *foci*, ſive *umbilici* ellipſeos ſunt *duo puncta axis majoris, quorum utrumque ita diſtat a ſuo vertice, ut rectangulum contentum ſub axis portionibus per eorum alterum abſciſſis, quartam partem figuræ ipſius axis adæquet.*

CO-

(a) Lib. III. §. 51.
(b) Syn. Alg. §. 259.
(c) §. 83.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

Uterque focus ellipſeos ita diſtat a ſuo vertice, ut rectangulum contentum ſub ſegmentis axis ab illo determinatis, ſit æquale quadrato minoris ſemiaxis.

139. Ut ſi foci ellipſeos ABCD ſint puncta *a*, *d*, & minor axis AC, rectangulum ex B*a* in *a*D, ſicuti etiam rectangulum ex D*d* in *d*B, erit æquale quadrato minoris ſemiaxis A*b*. Conſtat enim, hujuſmodi quadratum eſſe æquale quadranti figuræ majoris axis BD (a), cui illa itidem rectangula ſunt æqualia.

THEOREMA XIX.

Recta linea ducta ex foco ellipſeos ad extremum minoris axis eſt æqualis ſemiaxi majori.

140. Ex foco *d* ellipſeos ABCD ducatur ad extremum A minoris axis CA recta *d*A. Dico, rectam *d*A eſſe æqualem majori ſemiaxi D*b*.

Demonſtratio.

Cum rectangulum ex D*d* in *d*B ſit æquale quadrato ſemiaxis *b*A (b), quadratum ſemiaxis *b*A una cum quadrato ſegmenti *db* erit æquale rectangulo ex D*d* in *d*B una cum quadrato ejuſdem ſegmenti *db* (c). Rectangulum autem ex D*d* in *d*B una cum quadrato ſegmenti *db* eſt æquale quadrato ſemiaxis D*b* (d). Ergo etiam quadratum ſemiaxis *b*A una cum quadrato ſegmenti *db* erit æquale quadrato ſemiaxis D*b* (e). Manifeſtum porro eſt, quadratum rectæ *d*A æqua- Fig. 12. T. XIV.

(a) §. 83.
(b) §. 139.
(c) Synop. Alg. §. 265.
(d) §. 49.
(e) Synop. Alg. §. 268.

re quadratum ſemiaxis *bA* una cum quadrato ſegmenti *db* (a); cum angulus *dbA* trianguli *dbA* ſit rectus (b). Ergo quadratum rectæ *dA* erit itidem æquale quadrato ſemiaxis D*b* (c); ac proinde rectæ D*b*, *dA* erunt inter ſe æquales (d). Itaque recta linea &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XX.

Foci ellipſeos æqualiter diſtant ab illius centro.

141. Puncta *d*, *a* ſint foci ellipſeos ABCD. Dico, eorum diſtantias *bd*, *ba* a centro *b* ipſius ellipſis eſſe æquales.

Demonſtratio.

Fig. 12. T. XIV. Ex ipſis focis *d*, *a* ducantur ad extremum punctum A minoris axis CA rectæ *dA*, *aA*. Igitur quoniam tam recta *dA*, quam recta *aA* adæquat ſemiaxim majorem D*b* (e), ipſæ *dA*, *aA* erunt inter ſe æquales (f); ac proinde triangulum *dAa* erit iſoſceles (g). Recta autem A*b* ad perpendiculum inſiſtit baſi *da* (h). Ergo recta *da* diviſa erit bifariam in puncto *b* (i), ſeu erit $bd = ba$. Foci itaque ellipſeos &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Foci ellipſeos æqualiter diſtant a ſuo vertice.

142. Nimirum diſtantia *d*D foci *d* a vertice D erit æqualis diſtantiæ *a*B foci *a* a vertice B. Quandoquidem cum ſit $bd = ba$ (k), & $bD = bB$ (l), erit etiam $bD - bd = bB - ba$ (m), ſive $dD = aB$.

THEO-

(a) Lib. VI. §. 37.
(b) §. 31.
(c) Syn. Alg. §. 262.
(d) Lib. I. §. 187.
(e) §. 140.
(f) Syn. Alg §. 259.
(g) Lib. V. §. 25.
(h) §. 31.
(i) Lib. V. §. 78.
(k) §. 141.
(l) §. 28.
(m) Synop. Alg. §. 266.

Digitized by Google

THEOREMA XXI.

Semiordinata ad majorem axim ellipſeos ducta ex ejus foco adæquat ſemiparametrum ipſius axis.

143. Recta AC ſit parameter majoris axis AB ellipſeos ADB, ex cujus foco *a* ducatur ſemiordinata *ab* ad ipſum axim AB. Dico, ſemiordinatam *ab* æquare dimidiam partem parametri AC.

Demonſtratio.

Quoniam rectangulum ex A*a* in *a*B eſt ad quadratum *ax* ſemiordinatæ *ab*, ut axis AB ad parametrum AC (a), rectangulum ex A*a* in *a*B erit ad quadratum *ax* ſemiordinatæ *ab*, ut rectangulum ABNC figuræ ipſius axis AB ad quadratum A*ed*C ipſius parametri AC (b); cum rectangulum ABNC ſit ad quadratum A*ed*C, ut AB ad A*e*, ſive ut AB ad AC, nempe ut eorum baſes (c). Ergo *alternando*, quadratum *ax* ſemiordinatæ *ab* erit ad quadratum A*ed*C parametri AC, ut eſt rectangulum ex A*a* in *a*B ad rectangulum ABNC (d). Rectangulum autem ex A*a* in *a*B eſt in ratione *ſubquadrupla* ad rectangulum ABNC (e). Ergo etiam quadratum *ax* ſemiordinatæ *ab* erit in ratione *ſubquadrupla* ad quadratum A*ed*C parametri AC; ac proinde recta *ab* erit in ratione *ſubdupla* ad parametrum AC, nempe erit 2*ab* =AC (f). Itaque ſemiordinata &c. quod erat oſtendendum. Fig. 13. T. XIV.

(a) §. 75.
(b) Lib. I. §. 78.
(c) Lib. IX. §. 95.
(d) Lib. I. §. 125.
(e) §. 138.
(f) Lib. IX. §. 173.

Digitized by Google

LEMMA VI.

Si recta linea ſecta ſit utcunque; duo rectangula contenta ſub tota, & ſub partibus ſimul ſumta erunt æqualia quadrato totius.

Euclid. l.2.p.2. 144. Recta AB ſecta ſit utcunque in puncto *a*. Dico, rectangulum ex AB in A*a* ſimul cum rectangulo ex AB in *a*B æquare quadratum totius AB.

Demonſtratio I.

Fig. 11. T. XIII. Ponatur AB$=m$, & A*a*$=n$, adeoque *a*B$=m-n$. Igitur quadratum totius AB erit$=mm$, rectangulum A*a*×AB $=mn$, & rectangulum *a*B×AB $=mm-mn$. Quamobrem erit quoque A*a*×AB+*a*B×AB$=mn+mm-mn$ (a). Eſt autem $mn+mm-mn=mm$. Ergo duo rectangula A*a*×AB, *a*B×AB ſimul ſumta erunt æqualia quadrato totius AB.

Demonſtratio II.

Deſcripto circa rectam AB ſemicirculo A*b*B, erecta ponatur ex puncto *a* perpendicularis *ab*, junctiſque punctis *b*, A recta *b*A, & punctis *b*, B recta *b*B, conſtitutum habebitur triangulum rectangulum B*b*A, in quo latus *b*A erit media proportionalis inter totam AB, & partem A*a*, & latus *b*B media itidem proportionalis inter totam AB, & partem *a*B (b). Igitur rectangulum ex AB in A*a* erit æquale quadrato rectæ A*b*, & rectangulum ex AB in *a*B quadrato rectæ *b*B (c). Duo autem quadrata rectarum A*b*, *b*B æqualia ſunt quadrato totius AB (d). Ergo etiam duo rectangula AB×A*a*, AB×*a*B erunt eidem quadrato totius AB æqualia (e). Itaque ſi recta &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) Syn. Alg. §. 265.
(b) Lib. IX. §. 74.
(c) Ibid. §. 111.
(d) Lib. VI §. 17.
(e) Syn. Alg. §. 262.

Digitized by Google

THEOREMA XXII.

In ellipſi diſtantia focorum eſt media proportionalis inter latus tranſverſum, ejuſque differentiam a latere recto.

145. Sint *a*, *m* foci ellipſeos ADB, latus tranſverſum recta AB, parameter BE, & differentia lateris tranſverſi AB a recto BE ſit recta EF. Dico, rectam *am* utroque foco terminatam, eſſe mediam proportionalem inter latus AB, & differentiam EF. Fig. 13. T. XIV.

Demonſtratio.

Quoniam rectæ *a*G, *m*G ſunt æquales (a), ſeu recta *am* eſt dupla rectæ G*m*, quadratum rectæ *am* erit quadruplum quadrati rectæ G*m* (b). Rectangulum autem ex latere AB in parametrum BE eſt itidem quadruplum rectanguli ex A*m* in *m*B (c). Ergo quadratum rectæ *am* una cum rectangulo rectæ AB in rectam BE erit itidem in ratione quadrupla ad quadratum rectæ G*m* una cum rectangulo rectæ A*m* in rectam *m*B (d). Rectangulum autem ex A*m* in *m*B una cum quadrato rectæ G*m* eſt æquale quadrato rectæ GB (e). Igitur quadratum rectæ *am* una cum rectangulo rectæ AB in BE erit ſimiliter in ratione quadrupla ad quadratum rectæ GB (f); cumque ejuſdem quadrati ſemiaxis, ſive rectæ GB quadruplum quoque ſit quadratum totius axis AB (g), quadratum rectæ *am* una cum rectangulo rectæ AB in BE erit æquale quadrato totius rectæ AB (h). Conſtat porro quadratum rectæ AB eſſe æquale duobus rectangulis ex AB in BE, & ex AB in EF (i). Ergo quadratum rectæ *am* una cum rectangulo ex AB in BE erit æquale duobus rectangulis AB×BE, AB×EF (*k*). Quamobrem, demto utrique mem-

(a) §. 141.
(b) Lib. IX. §. 172.
(c) §. 138.
(d) Lib I. §. 144.
(e) §. 49.
(f) Lib. I. §. 112.
(g) Lib. IX. §. 172.
(h) Lib. I. §. 103.
(i) §. 144.
(k) Syn. Alg. §. 261.

Digitized by Google

membro hujus æquationis communi rectangulo AB×BE, quadratum rectæ *am*, quod in primo membro relinquitur, æquabit rectangulum AB×EF, quod ſupereſt in ſecundo (a), & ideo recta *am* erit media proportionalis inter rectas AB, EF (b). Itaque in ellipſi &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXIII.

Si ad punctum G, *in quo ellipſis* ABCD *a recta* EK *lateraliter tangitur, ducatur ex illius foco* a *recta* aG; *tum ipſi* aG *agatur ex centro* b *recta parallela* bF *occurrens tangenti* EK *in* F, *recta* bF *erit æqualis ſemiaxi majori* bD.

146. Ex altero foco *d* ad idem punctum G ducatur recta *d*G, ad punctum F recta *d*F, atque ad tangentem EK recta dK ipſis *b*F, *a*G parallela.

Demonſtratio.

Quoniam igitur tam angulus KG*d* (c), quam angulus
Fig. 12. T. XIV. GK*d* (d), adæquat angulum EG*a*, duo illi anguli erunt inter ſe æquales (e), adeoque etiam latera K*d*, *d*G trianguli K*d*G erunt æqualia (f), ſeu triangulum K*d*G erit iſoſceles. In triangulo autem G*da* habetur *de*.*e*G = *db*.*ba* (g), ſicuti etiam KF.FG = *de*.*e*G in triangulo GK*d*, & ideo KF.FG = *db*.*ba* (h). Ergo, cum ſit *db* = *ba* (i), erit quoque KF = FG (*k*); rectaque *d*F in triangulo K*d*G ad perpendiculum baſi KG incumbet (l); & ideo uterque angulus KF*d*, GF*d* erit rectus. Hinc, ductis tangentibus verticalibus DH, BE, nec non ex puncto D ad punctum F recta DF, ex puncto *d* ad punctum H recta *d*H, ex puncto B ad punctum F recta BF, & ex puncto E ad punctum *d* recta E*d*, duo anguli oppo-

(a) Syn. Alg. §. 266.
(b) Lib. I §. 118.
(c) §. 136.
(d) Lib. IV. §. 14.
(e) Syn. Alg. §. 259.
(f) Lib. V. §. 65.
(g) Lib. IX. §. 55.
(h) Lib. I. § 78.
(i) §. 141.
(k) Lib. I. §. 45.
(l) Lib. V. §. 89.

Digitized by Google

oppoſiti HD*d*, HF*d* in quadrilatero HD*d*F erunt recti, ſicuti etiam duo *d*FE, *d*BE in quadrilatero F*d*BE. Quamobrem circulus deſcriptus circa rectam lineam H*d* tranſibit per quatuor puncta H, D, *d*, F, & circulus deſcriptus circa rectam *d*E tranſibit itidem per quatuor puncta F, *d*, B, E (a). Igitur duo anguli DH*d*, DF*d*, utpote in eadem circuli portione conſiſtentes, erunt inter ſe æquales (b), quemadmodum eandem ob cauſam etiam anguli BFE, B*d*E. Oſtenſum eſt autem §. 136. angulos DH*d*, B*d*E eſſe æquales. Ergo duo quoque anguli DF*d*, BFE erunt inter ſe æquales (c); ac proinde, ſi utrique adjiciatur angulus *d*FB, angulus DFB æquabit angulum *d*FE (d). Demonſtravimus autem, angulum *d*FE eſſe rectum. Igitur etiam angulus DFB erit rectus; & ideo ſi centro *b*, intervallo *b*D deſcribatur circulus DMB, is tranſibit per punctum F (e); rectaque propterea *b*F æquabit rectam, ſeu ſemiaxim majorem *b*D (f). Si ergo ad punctum &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XXIV.

Si ex focis ad quodvis punctum curvæ ellipticæ inclinentur duæ rectæ lineæ, earum ſumma æquabit majorem axim ipſius ellipſis.

147. Ex focis *d*, *a* ellipſeos ABCD ad quodvis punctum G curvæ ellipticæ ducantur rectæ *d*G, *a*G. Dico, rectas *d*G, *a*G ſimul ſumtas æquare axim majorem DB. Apoll. l. 3. p. 52

Demonſtratio.

Etenim, ductis rectis *b*F, *d*K parallelis inclinatæ *a*G, quæ occurrant tangenti laterali KE, & ſimul junctis punctis *d*, F recta *d*F, cum in triangulo *d*G*a* ſit G*a*. *eb* = *da*. *db* (g), erit G*a* = 2*be*, ſicuti eſt *da* = 2*db* (h). Eadem ratione quoniam Fig. 12. T. XIV.

in

(a) Lib. VII. §. 82.
(b) Ibid. §. 73.
(c) Syn. Alg. §. 259.
(d) Ibid. §. 266.
(e) Lib. VII. §. 78.
(f) Ibid. §. 10.
(g) Lib. IX. §. 59.
(h) §. 141.

Digitized by Google

in triangulo K*d*G habetur K*d*.F*e* = KG.FG , quemadmodum eſt KG = 2FG (a), ita erit K*d* = 2F*e* . Eſt autem *d*G = *d*K (b). Ergo erit etiam *d*G = 2F*e* ; ac proinde *a*G + *d*G = 2*be* + 2F*e* , ſive *a*G + *d*G = 2*b*F . Conſtat autem , eſſe *b*F = *b*D (c) ; & ideo 2*b*F = DB . Igitur erit *a*G + *d*G = DB (d). Si ergo ex focis &c. quod erat oſtendendum,

COROLLARIUM.

Inclinatæ ex focis ad ſingula puncta curvæ ellipticæ ſunt omnes inter ſe æquales.

148. Ut ſi ex focis *d* , *a* ducantur ad puncta N, A, P curvæ ellipticæ DAB rectæ *d*N , *a*N * *d*A , *a*A * *d*P , *a*P , erit *d*N + *a*N = *d*A + A*a* = *d*P + *a*P . Perſpicuum ſiquidem eſt, eſſe tam *d*N + *a*N , quam *d*A + *a*A , ſicuti etiam *d*P + *a*P, = DB (e).

THEOREMA XXV.

Sectio cylindri neque circulo baſeos parallela ; neque ſubcontraria , cujus axis cum diametro baſeos cylindri extra baſim ipſam concurrat , eſt ellipſis conicæ ellipſi omnino ſimilis.

149. Eſto F*ab*K ſectio cylindri ABDC circulo baſeos BD
Fig. 14 minime parallela , neque ſubcontrarie poſita , cujus axis FG,
T. XIV. nempe communis ſectio plani ABCD per axim, & plani F*ab*K ſectionem ipſam determinantis , concurrat extra cylindrum cum diametro BD baſeos ejuſdem in puncto E. Dico, ſectionem F*ab*K eſſe ellipſim ejuſdem omnino indolis cum ea, quæ ex cono deducitur.

Demon-

(a) Ex demonſtratione §. 146.
(b) Ex demonſtratione §. 146.
(c) §. 146.
(d) Syn. Alg. §. 261.
(e) §. 147.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Ut ſectio F*ab*K ſit ellipſis omnino ſimilis ellipſi conicæ, duo oſtendenda ſunt, videlicet *primo*: quadrata ſemiordinatarum ad axim in ſectione ipſa F*ab*K eſſe directe inter ſe, ut rectangula, quæ ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis continentur. *Secundo*: illa quadrata non eſſe hiſce rectangulis æqualia.

Ad primum ergo quod attinet, in axe FG ſumantur duo quæcunque puncta *d*, *e*, per quæ agantur rectæ LM, HK in plano per cylindri axim traducto, quæ ſint parallelæ tum inter ſe, tum diametro DB circuli baſeos B*m*D. Ex iiſdem itidem punctis *d*, *e* ducantur rectæ *da*, *eb* parallelæ rectæ *mn* ad rectos angulos diametrum BD circuli baſeos B*m*D ſecanti; ac proinde etiam inter ſe parallelæ (a), atque rectis LM, HK perpendiculariter inſiſtentes ob eandem ſcilicet inclinationem ad planum ABDC tum plani, in quo ſint rectæ *ad*, *mn*, tum plani, in quo ſint rectæ *be*, *mn*. Si ergo cylindrus ABDC ſectus concipiatur duobus planis, in quorum altero rectæ LM, *da*, in altero rectæ HK, *be* poſitæ concipiantur, ſectiones L*a*M, H*b*K erunt circuli (b), quorum diametris LM, HK rectæ *ad*, *be* erunt perpendiculares. Igitur quadratum rectæ *ad* erit æquale rectangulo ex L*d* in *d*M, & quadratum rectæ *be* rectangulo ex H*e* in *e*K (c); atque adeo quadratum rectæ *ad* erit ad rectangulum L*d*×*d*M, ut quadratum rectæ *be* ad rectangulum H*e*×*e*K; & *alternando*, quadratum rectæ *ad* erit ad quadratum rectæ *be*, ut rectangulum L*d*×*d*M ad rectangulum H*e*×*e*K (d). Rectangulum autem L*d*×*d*M eſt ad rectangulum H*e*×*e*K in ratione compoſita ex ratione rectæ L*d* ad rectam H*e*, & ex ratione rectæ *d*M ad rectam *e*K, baſium ſcilicet, & altitudinum (e); adeoque in ratione compoſita ex ratione rectæ F*d* ad rectam F*e*, & ex ratione rectæ *d*G ad rectam *e*G; cum

 ſit

(a) Lib. IV. §. 17.
(b) Lib. IX. §. 81.
(c) Lib. IX. §. 111.
(d) Lib. I. §. 125.
(e) Lib. IX. §. 105.

Digitized by Google

ſit F*d*.F*e* = L*d*.H*e*, & *d*G.*e*G = *d*M.*e*K (a), propter parallelismum ſcilicet rectarum L*d*, H*e* in triangulo HF*e*, & rectarum *d*M, *e*K in triangulo *d*GM. Ergo etiam quadratum rectæ *ad* erit ad quadratum rectæ *be* in ratione compoſita ex ratione rectæ F*d* ad rectam F*e*, & ex ratione rectæ *d*G ad rectam *e*G. Manifeſtum porro eſt, rectangulum F*d*×*d*G eſſe ad rectangulum F*e*×*e*G in ratione compoſita ex ratione rectæ F*d* ad rectam F*e*, & ex ratione rectæ *d*G ad rectam *e*G, videlicet baſium, & altitudinum (b). Igitur, ut rectangulum F*d*×*d*G ad rectangulum F*e*×*e*G, ita eſt quadratum rectæ *ad* ad quadratum rectæ *be* (c). Quadrata itaque ſemiordinatarum ad axim in ſectione cylindrica F*ab*G ſunt directe inter ſe, ut rectangula ſub correſpondentibus portionibus ipſius axis comprehenſa.

Quod vero ſpectat ad alterum, perſpicuum id fiet, ſi oſtendatur, ſectionem F*ab*G non eſſe circulum. Sumto igitur in axe FG puncto medio *x*, & per illud ducta recta NS in plano parallelogrammi ABDC, nempe ſectionis cylindri per axim, parallela lateribus AB, CD, agatur in eodem plano per idem punctum *x* recta PT parallela lateribus AC, BD. Certum eſt, rectam PT diviſam eſſe bifariam in *x*; cum ſit P*x* = AN, & *x*T = NC (d). Certum quoque eſt, ſectionem peractam plano, in quo ſint recta PT, & recta *xz* ducta in plano ſectionis F*ab*G, parallela rectæ *mn*, eſſe circulum. Igitur rectæ P*x*, *xz*, utpote radii ejuſdem circuli, erunt æquales (e). Recta autem F*x* eſt major recta P*x* (f); cum ſit oppoſita majori angulo FP*x* in triangulo FP*x*; & eadem ratione etiam recta *x*G excedit rectam *x*T ipſi P*x* æqualem. Ergo punctum *x* ſumtum in medio diametri FG figuræ curvilineæ F*ab*G non eſt hujuſmodi, ut omnes rectæ, quæ ex illo cadunt in curvam F*ab*G, ſint inter ſe æquales. Igitur ſectio F*ab*G non eſt circulus; atque adeo &c. Itaque ſectio cylindri &c. quod erat oſtendendum.

SCHO-

(a) Lib. IX. §. 59.
(b) Ibid. §. 105.
(c) Lib. I. §. 76.
(d) Lib. VI. §. 21.
(e) Lib. VII. §. 10.
(f) Lib. V. §. 51.

Digitized by Google

SCHOLION.

150. Quæcunque ergo de conica ellipſi hactenus demonſtravimus, de ellipſi cylindrica itidem ſunt intelligenda.

CAPUT TERTIUM.

De Parabola.

DEFINITIO I.

151. P*Arabola dicitur illa coni ſectio, quæ fit plano parallelo lateri ipſius coni, ſeu cujus axis a coni latere æqualiter ubique diſtat*. Sic ſectio DEF coni recti BAC *parabola* nuncupatur. Planum quippe GD, quo illa perficitur, æqualiter ubique diſtat a latere AC coni, ejuſque propterea axis EL eſt eidem lateri parallelus. Fig. 1. T. XIII.

COROLLARIUM.

152. Hinc *curva parabolica in ſe non redit, quemadmodum elliptica*; & ideo *unus tantum eſt parabolæ axis, & unus vertex*.

THEOREMA I.

In parabola quadrata ſemiordinatarum ad axim ſunt directe inter ſe, ut correſpondentes abſciſſæ.

153. In cono recto BAC ſpectetur ſectio parabolica HDK, Fig. 1. cujus axis ſit recta DE, & ſemiordinatæ ad illum rectæ T. XV. *ab*, *ze*. Dico, quadratum ſemiordinatæ *ab* eſſe ad quadra- Apoll. l. 1. p. 20 tum ſemiordinatæ *ze*, ut eſt abſciſſa D*b* ad abſciſſam D*e*.

Demonſtratio.

Quoniam tam recta *ab*, quam recta *ze* eſt parallela rectæ HE in plano circuli baſeos BHC exiſtenti (a), ſi per puncta *b*, *e* ducantur rectæ FG, MN, quæ ſint in plano trianguli per axim, & diametro, ſeu baſi BC ipſius trianguli ſint parallelæ, planum, in quo ſint rectæ *ab*, FG, erit parallelum circulo baſeos BHC, ſicuti etiam planum, in quo ſint rectæ *ze*, MN. Igitur ſectiones F*a*G, M*z*N erunt circuli (b), quorum diametri erunt rectæ FG, MN, illiſque ad perpendiculum inſiſtent rectæ *ab*, *ze*, ſicuti recta HE eſt diametro BC perpendicularis; cum nempe eadem ubique ſit inclinatio plani ſectionis HDK ad planum BAC trianguli per axim. Igitur quadratum ſemiordinatæ *ab* æquabit rectangulum ex F*b* in *b*G, & quadratum ſemiordinatæ *ze* rectangulum ex M*e* in *e*N (c); atque propterea quadratum ſemiordinatæ *ab* erit ad rectangulum ex F*b* in *b*G, ut eſt quadratum ſemiordinatæ *ze* ad rectangulum ex M*e* in *e*N, & *alternando*, quadratum ſemiordinatæ *ab* erit ad quadratum ſemiordinatæ *ze*, ut rectangulum ex F*b* in *b*G ad rectangulum ex M*e* in *e*N (d). Rectangulum autem ex F*b* in *b*G eſt ad rectangulum ex M*e* in *e*N, ut eſt recta F*b* ad rectam M*e*, nempe ut eorum baſes (e); cum rectæ *b*G, *e*N, quæ haberi poſſunt veluti eorum altitudines, ſint inter ſe æquales (f), utpote latera oppoſita parallelogrammi G*be*N. Ergo etiam quadratum ſemiordinatæ *ab* erit ad quadratum ſemiordinatæ *ze*, ut eſt recta F*b* ad rectam M*e* (g). Perſpicuum porro eſt, rectam D*b* in triangulo MD*e* eſſe ad rectam D*e*, ut eſt recta F*b* ad rectam M*e* (h), propterea quod rectæ F*b*, M*e* ſint in ipſo triangulo inter ſe parallelæ. Igitur quadratum ſemiordinatæ *ab* erit ad quadratum ſemiordinatæ *ze*, ut eſt abſciſſa D*b* ad abſciſſam D*e* (i). Itaque in parabola &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) §. 17.
(b) Lib. XI. §. 91.
(c) Lib. IX. §. 113.
(d) Lib. I. §. 125.
(e) Lib. IX. §. 95.
(f) Lib. VI. §. 20.
(g) Lib. I. §. 77.
(h) Lib. IX. §. 59.
(i) Lib. I. §. 78.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

154. Eſt igitur parabola *figura plana curva linea in ſe minime redeunte comprehenſa, in qua ſemiordinatarum ad axim quadrata ſunt directe inter ſe, ut correſpondentes abſciſſæ.*

COROLLARIUM II.

Semiordinatæ ad axim in parabola ſunt in ratione ſubduplicata abſciſſarum; abſciſſæ vero in ratione ſemiordinatarum duplicata.

155. Videlicet in parabola BAC ſemiordinata *ab* eſt ad ſemiordinatam *de* in ratione *ſubduplicata* abſciſſæ A*a* ad abſciſſam A*d*. Abſciſſa vero A*a* eſt ad abſciſſam A*d* in ratione *duplicata* ſemiordinatæ *ab* ad ſemiordinatam *de*. Cum enim ſemiordinatæ *ab*, *de* ſint in ratione *ſubduplicata* ſuorum quadratorum (a), & ratio abſciſſarum A*a*, A*d* non ſit diverſa a ratione horum quadratorum (b), ſemiordinatæ *ab*, *de* erunt quoque in ratione *ſubduplicata* abſciſſæ A*a* ad abſciſſam A*d*. Viciſſim vero abſciſſæ A*a*, A*d* erunt in ratione *duplicata* ſemiordinatarum *ab*, *de*; cum ſint inter ſe, ut quadrata ipſarum ſemiordinatarum *ab*, *de*. Fig. 2. T. XV.

COROLLARIUM III.

In parabola ſemiordinatæ ad axim eo ſunt majores, quo magis a vertice recedunt.

156. Sic in parabola BAC ſemiordinata *de* major eſt ſemiordinata *ab*, quæ eſt proximior vertici A. Etenim, cum quadratum ſemiordinatæ *de* ſit ad quadratum ſemiordinatæ *ab*, ut abſciſſa A*d* ad abſciſſam A*a*, ſicuti abſciſſa A*d* excedit abſciſſam A*a*, ita quadratum ſemiordinatæ *de* ſuperabit qua-

(a) Lib. IX §. 173. (b) §. 153.

Digitized by Google

quadratum ſemiordinatæ *ab* (a); ac proinde recta quoque *de* major erit recta *ab*.

COROLLARIUM IV.

Etiam ordinatæ ad axim in parabola in receſſu a vertice continuo majores fiunt.

157. Ordinatæ namque ad axim ſunt directe inter, ut ſemiordinatæ (b).

COROLLARIUM V.

158. Poſtremo perſpicuum eſt, *in parabola quadrata ſemiordinatarum ad axim ea proportione continuo creſcere in receſſu a vertice, qua augentur abſciſſæ;* atque hinc parabolam independenter quoque a cono definiri itidem poſſe, *figuram planam curva linea in ſe minime redeunte terminatam, in qua ſemiordinatarum ad axim quadrata ea proportione in receſſu a vertice augentur, qua creſcunt correſpondentes abſciſſæ.*

THEOREMA II.

Si ex vertice axis parabolæ agatur recta ordinatis ad ipſum axim parallela, quæ illius ſit longitudinis, ut quadratum unius ſemiordinatæ adæquet rectangulum contentum ſub illa, & ſub correſpondente abſciſſa, quadratum alterius cujuslibet ſemiordinatæ ad axim æquabit rectangulum, quod ſub illa eadem recta, & ſub correſpondente abſciſſa itidem comprehenditur.

Fig. 2. 159. Ex vertice A axis AD parabolæ BAC ducatur recta
T. XV. AE parallela ordinatis *xb*, *ye*, ſitque AE tantæ longitudi-
Apoll. nis, ut quadratum unius ſemiordinatæ *ab* adæquet rectan-
l.1.p.11 gulum E*ma*A contentum ſub ipſa AE, & ſub abſciſſa A*a* ipſi ſemi-

(a) Lib.I.§.121. (b) Ibidem §.127

ſemiordinatæ correſpondente. Dico, quadratum quoque alterius cujuslibet ſemiordinatæ *de* æquare rectangulum E*nd*A, quod ſub ipſa eadem recta AE, & ſub abſciſſa A*d* comprehenditur.

Demonſtratio.

Quadratum ſemiordinatæ *ab* eſt ad quadratum ſemiordinatæ *de*, ut abſciſſa A*a* ad abſciſſam A*d* (a). Rectangulum autem E*ma*A eſt ad rectangulum E*nd*A æqualis baſis, ut altitudo A*a* ad altitudinem A*d* (b). Ergo quadratum ſemiordinatæ *ab* eſt ad quadratum ſemiordinatæ *de*, ut rectangulum E*ma*A ad rectangulum E*nd*A (c). Poſuimus autem, quadratum ſemiordinatæ *ab* æquare rectangulum E*ma*A. Ergo etiam quadratum ſemiordinatæ *de* æquabit rectangulum E*nd*A (d). Itaque ſi ex vertice &c. quod erat oſtendendum.

DEFINITIO II.

160. Recta AE vocatur *parameter*, vel *latus rectum* axis AD parabolæ BAC. Ipſe vero axis AD *latus* ejuſdem parabolæ *tranſverſum* nuncupatur. Quamobrem univerſaliter loquendo, *parameter* axis parabolæ eſt *recta linea ducta ex vertice axis ordinatis ad ipſum axim parallela, cujus longitudo tanta eſt, ut quadratum cujuslibet ſemiordinatæ ad axim ſit æquale rectangulo, quod ſub illa, & ſub correſpondentibus reſpective abſciſſis comprehenditur.*

COROLLARIUM I.

161. *Parameter axis parabolæ perpendiculariter ipſi axi inſiſtit, & parabolam tangit*. Res manifeſta fiet, ſi quæ diximus de *parametro* axis ellipſeos, memoria repetantur.

COROL.

(a) §. 153.
(d) Lib. IX. §. 10 0.
(c) Lib. I. §. 78.
(d) Ibidem §. 118.

Digitized by Google

COROLLARIUM II.

In parabola quadratum cujuslibet ſemiordinatæ ad axim eſt æquale rectangulo, quod continetur ſub parametro, & ſub correſpondente abſciſſa.

162. Demonſtravimus enim, in parabola BAC quadratum ſemiordinatæ *ab* eſſe æquale rectangulo E*ma*A contento ſub recta AE, quæ eſt parameter axis AD, & ſub abſciſſa A*a*.

COROLLARIUM III.

163. Eſt igitur parabola, ipſam quoque independenter a cono ſpectando, *figura plana curva linea in ſe minime redeunte comprehenſa, in qua ſemiordinatarum ad axim quadrata ſunt æqualia rectangulis contentis ſub parametro, & ſub correſpondentibus abſciſſis.*

SCHOLION.

164. Ob hanc æqualitatem quadrati cujuslibet ſemiordinatæ ad axim cum rectangulo, quod ſub *parametro* ipſius axis, & ſub correſpondente abſciſſa comprehenditur, conicæ hujuſmodi ſectioni nomen *parabolæ*, quod *æqualitatem* refert, inditum eſt.

COROLLARIUM IV.

Parameter axis parabolæ eſt tertia proportionalis abſciſſæ, & ſemiordinatæ ad axim.

165. Videlicet in parabola BAC, cujus axis ſit recta AD,
Fig. 1. T. XV. parameter AE, & ſemiordinatæ ad axim rectæ *ab*, *de*, habetur ∺ A*a*.*ab*.AE, ſicuti etiam ∺ A*d*.*de*.AE. Id enim

ex

Digitized by Google

ex eo neceſſario ſequitur, quod quadratum rectæ *ab* ſit æquale rectangulo ex A*a* in AE, & quadratum rectæ *de* rectangulo ex A*d* in AE (a).

DEFINITIO III.

166. Si parameter axis parabolæ fuerit æqualis axi ejuſdem, parabola dicitur *æquilatera*. Sic æquilatera dicetur parabola BAC, ſi parameter AE fuerit æqualis axi AD. Fig. 2. T. XV.

DEFINITIO IV.

167. *Directrix, ſeu regulatrix parabolæ eſt recta linea ducta ex puncto extremo parametri axi parallela. Subdirectrix vero, ſive ſubregulatrix eſt recta axi itidem parallela, parametrum biſariam dividens.* Sic recta EF ducta ex puncto extremo E parametri AE parallela axi AD eſt *directrix* parabolæ BAC; ejuſdem vero *ſubdirectrix* recta GH, axi AD itidem parallela, ipſumque parametrum biſariam dividens. Fig. 2. T. XV.

COROLLARIUM.

168. *Subdirectrix parabolæ eſt directrici parallela.* Utraque enim eſt parallela axi.

THEOREMA III.

In parabola BAC quadratum cujuslibet ſemiordinatæ de *ad axim AD eſt duplum quadrilateri AG*sd, *quod ſemiparametro AG, abſciſſa A*d, *ſubdirectrice G*s, *& recta* ds *comprehenditur.*

169. Recta *ds* producatur in directum uſque ad regulatricem EF.

(a) Lib. IX. §. 118.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Quoniam rectæ AE, *ds* ſunt parallelæ (a), ſicuti etiam rectæ AD, GH (b), & angulus BAD rectus (c), quadrilaterum G*sd*A erit parallelogrammum rectangulum. Quamobrem, cum recta AE ſit dupla rectæ AG (d), rectangulum quoque AE*nd* erit duplum rectanguli G*sd*A (e), quod eadem ſit utriuſque altitudo A*d*. Quadratum autem ſemiordinatæ *de* adæquat rectangulum AE*nd* (f). Ergo quadratum ſemiordinatæ *de* duplum itidem erit rectanguli G*sd*A (g); ac proinde in parabola &c. quod erat oſtendendum.

Fig. 2. T. XV.

THEOREMA IV.

Si in parabola BAC, cujus axis ſit recta AD, parameter AG, ſubdirectrix HK, & ſemiordinata Fa, fiat, ut recta ba *ad ſemiordinatam* aF, *ita ipſa ſemiordinata* aF *ad rectam* aE *compoſitam ex abſciſſa A*a, *& ex ſegmento EA axi in directum adjecto, recta EF ducta ex puncto E ad extremum F ipſius ſemiordinatæ, erit tangens parabolam in puncto F.*

170. Ex quovis puncto *x* rectæ EF agatur ad axim AD recta *xd* parallela tangenti AG, atque ſubdirectrici HK occurrens in puncto N, & puncta E, *b* jungantur recta E*b*.

Demonſtratio.

Fig. 3. T. XV. Eodem plane ratiocinio hæc propoſitio oſtenditur, quo §. 94. idipſum de tangente ellipſim demonſtravimus. Quandoquidem, cum ex hypotheſi jam ſit ∺ *ba*. *a*F. *a*E, quadratum

(a) §. 160.
(b) §. 168.
(c) §. 161.
(d) §. 167.
(e) Lib. IX. §. 95.
(f) §. 162.
(g) Lib. I. §. 102.

tum rectæ *a*F erit æquale rectangulo ex *ba* in *a*E, ſcilicet M*a* (a); unde ducta diagonali E*b*, ſicuti rectangulum M*a* eſt duplum trianguli *b*E*a* (b), ita ejuſdem trianguli duplum erit quadratum rectæ *a*F (c). Eſt autem quadratum ejuſdem *a*F duplum rectanguli H*ba*A (d). Igitur rectangulum H*ba*A adæquat triangulum *b*E*a* (e), demptoque utrique propterea trapezio *by*A*a*, triangulum H*by* erit æquale triangulo *y*AE (f). Triangulum autem H*by* eſt majus trapezio HN*zy*. Ergo etiam triangulum *y*AE majus erit eodem trapezio HN*zy* (g); quapropter, ſi utrique adjiciatur trapezium *yzd*A, triangulum *z*E*d* majus erit trapezio H*nd*A (h). Conſtat autem, eſſe ∺ *zd*.*dx*.E*d* (i). Igitur quadratum rectæ *dx* erit æquale rectangulo ex *zd* in E*d* (k); cumque hujuſmodi rectangulum ſit duplum trianguli *z*E*d*, ejuſdem quoque trianguli duplum erit quadratum rectæ *dx*. Quadratum autem ſemiordinatæ *de* eſt duplum rectanguli HN*d*A (l). Ergo quadratum ſemiordinatę *de* erit ad rectangulum HN*e*A, ut eſt quadratum rectę *dx* ad triangulum *z*E*d*. Demonſtravimus autem, rectangulum HN*d*A deficere a triangulo *z*E*d*. Igitur etiam quadratum rectę *de* minus erit quadrato rectę *dx* (m); ac proinde recta quoque *de* erit minor recta *dx*. Igitur punctum *x* cadit extra curvam parabolicam BAC, eodemque ratiocinio demonſtrabitur, aliud quodcunque punctum diverſum a duncto F extra ipſam curvam parabolicam reperiri. Recta ergo EF tangit parabolam BAC in puncto F; & ideo ſi axis parabolę &c. quod erat oſtendendum.

(a) Lib. IX. §. 111.
(b) Lib. VI. § 21.
(c) Lib. I. §. 102.
(d) §. 169.
(e) Lib. I. §. 113.
(f) Syn. Alg. §. 166.
(g) Ibid. §. 264.
(h) Ibidem §. 268.
(i) §. 93.
(k) Lib IX. §. 111.
(l) §. 162.
(m) Lib. I. §. 128.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Recta tangens parabolam, in uno dumtaxat puncto ipſam tangit.

171. Oſtenſum ſiquidem eſt, omnia puncta rectæ EF diverſa a puncto F cadere extra curvam parabolicam BAC.

COROLLARIUM II.

172. *Si in axe AD ſumatur ſegmentum* am *æquale rectæ* ab, *& ducatur ad punctum contactus F recta* mF, *hæc erit perpendicularis tangenti EF.* Quippe, cum ſit ÷ *ba*.*a*F.E*a*, erit quoque ÷ *ma*.*a*F,*a*E; & ideo angulus *m*FE erit rectus; cum rectangulum futurum ſit triangulum EF*m* (a).

DEFINITIO V.

173. In parabola, quemadmodum in ellipſi, recta *m*F dicitur *normalis* tangenti EF, *ſubnormalis* recta *am*, *ſubtangens* vero recta E*a*, quæ inter ſemiordinatam *a*F, & punctum concurſus E tangentis EF cum axe AD in directum ultra verticem producto intercipitur.

COROLLARIUM III.

In parabola ſubnormalis adæquat ſemiparametrum.

174. Nimirum *ſubnormalis ma* erit æqualis ſemiparametro HA. Etenim in rectangulo H*ba*A recta *ba* adæquat rectam HA (b). Recta autem *ma* poſita eſt æqualis rectæ *ba*. Ergo recta *ma* ſemiparametrum quoque HA æquabit (c).

CO-

(a) Lib. IX. §. 74.
(b) Lib. VI. §. 20.
(c) Syn. Alg. §. 261.

Digitized by Google

COROLLARIUM IV.

Recta ſubtangens in parabola eſt dupla abſciſſa, quæ reſpondet ſemiordinatæ ad axim ductæ ex puncto contactus.

175. Videlicet in parabola BAC, quæ tangatur a recta EF in puncto F, ducta ex puncto F ſemiordinata F*a* ad axim AD, ſubtangens E*a* eſt dupla abſciſſæ A*a*. Cum enim, ut ſupra oſtenſum eſt, quadratum ſemiordinatæ *a*F adæquet rectangulum M*ba*E, ſicuti quadratum ſemiordinatæ *a*F eſt duplum rectanguli H*ba*A (a), ita ejuſdem rectanguli H*ba*A duplum erit rectangulum M*ba*E (b). Duo autem rectangula M*ba*E, H*ba*A habent eandem baſim *ba*; ſuntque propterea eorum altitudines E*a*, A*a*, ut ipſa rectangula (c). Ergo erit E*a* = 2A*a*.

COROLLARIUM V.

176. Hinc *ſegmentum EA ſubtangentis E*a, *quod extra parabolam reperitur, adæquat abſciſſam A*a. Non enim poteſt Apoll. l.3.p.15
eſſe E*a* = 2A*a*, niſi etiam ſit EA = A*a*.

COROLLARIUM VI.

Recta tangens parabolam in vertice axis inter tangentem lateralem, & ſubtangentem comprehenſa, eſt pars dimidia ſemiordinatæ ad axim ductæ ex puncto contactus.

177. Nimirum, iiſdem poſitis, recta A*n* eſt pars dimidia ſemiordinatæ *a*F. Quippe, cum, ſtante hypotheſi, ſit *a*F . A*n* = E*a* . EA (d), erit *a*F = 2A*n*, quemadmodum eſt E*a* = 2EA (e).

CO-

(a) §. 169.
(b) Lib. I. §. 102.
(c) Lib. IX. §. 104.
(d) Ibid §. 59.
(e) §. 175.

Digitized by Google

COROLLARIUM VII.

Recta abſcindens in axe directe ultra verticem producto ſegmentum æquale abſciſſæ, tangit parabolam in extremo puncto ſemiordinatæ, quæ illi abſciſſæ reſpondet.

178. Sic recta EF erit tangens parabolam BAC in puncto F, ſi ſegmentum EA axis AD directe ultra verticem A producti, fuerit æquale abſciſſæ A*a*, quæ ſemiordinatæ *a*F ductæ ad axim ex puncto F correſpondet. Etenim, producta in directum ſemiordinata F*a* uſque ad ſubdirectricem HK, conſtitutoque rectangulo M*ba*E, rectangulum M*ba*E erit duplum rectanguli H*ba*A ejuſdem baſis *ba* (a). Ejuſdem autem rectanguli H*ba*A duplum eſt etiam quadratum ſemiordinatæ *a*F (b). Ergo quadratum ſemiordinatæ *a*F adæquat rectangulum M*ba*E (c); ac proinde habetur ∺ *ba*. *a*F. E*a* (d). Igitur recta EF tangit parabolam BAC in puncto F (e).

Apoll. l.1.p.33

THEOREMA V.

In parabola recta quævis linea axi parallela bifariam dividit omnes rectas parallelas tangenti ductæ per illius extremum.

179. In parabola BAC ducatur recta quævis *a*H parallela illius axi AK, atque ex puncto *a* agatur tangens *a*F, quæ concurrat in puncto F cum axe AK directe ultra verticem A producto. Dico, rectam *a*H dividere bifariam omnes rectas parallelas tangenti *a*F.

Apoll. l.1.p.46

Deinq-

(a) Lib. IX. §. 100.
(b) §. 169.
(c) Lib I. §. 103.
(d) Lib. IX. §. 118.
(e) §. 170.

Demonſtratio.

I.

Spectetur primo recta D*e*, quæ directe producta concurrat ultra verticem cum axe AK in puncto G. Tum per puncta D, *e*, ſicuti etiam ex puncto contactus *a*, ducantur ſemiordinatæ *em*, *an*, DX ad axim, parallelę idcirco tangenti AE, quę concurrat cum ipſa *a*H in puncto E, rectaque *me* directe producatur in *d*. Itaque cum rectę EA, *dm*, *an*, *r*X ſint parallelę, ſicuti etiam rectę EH, AK, & anguli EAK, *dm*K, *an*K ſint recti (a), quadrilatera E*dm*A, *danm*, *ar*X*n*, E*r*XA erunt parallelogramma, & quidem rectangula; cumque triangula *a*F*n*, DGX, utpote ſibi mutuo ęquiangula, ſint ſimilia (b), triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut quadratum lateris *an* ad quadratum lateris homologi DX (c). Ut autem quadratum rectæ *an* ad quadratum rectę DX, ita eſt recta A*n* ad rectam AX (d), & ut recta A*n* ad rectam AX, ita eſt rectangulũ E*an*A ad rectangulum E*r*XA (e). Ergo triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut rectangulum E*an*A ad rectangulum E*r*XA (f). Conſtat autem, triangulum *a*F*n* ęquare rectangulum E*an*A (g); cum recta *n*F ſit dupla rectę *n*A (h), eademque ſit utriuſque altitudo *an*. Ergo triangulum quoque DGX ęquabit rectangulum E*r*XA (i). Eodem ratiocinio oſtendam, triangulum *e*G*m* æquare rectangulum E*dm*A. Igitur, ſi triangulo DGX auferatur triangulum *e*G*m*, & rectangulo E*r*XA rectangulum E*dm*A, reſiduum trapezium D*em*X æquabit reſiduum rectangulum *mdr*X (k). Quamobrem, ſi utrique itidem dematur commune ſpatium *mexr*X, reſiduum triangulum *xed* erit æquale reſiduo triangulo *xr*D (l). Duo autem iſta triangula ſunt ſimi- Fig. 4. T. XV.

(a) §. 24. & §. 14. lib IV.
(b) Lib. IX. §. 66.
(c) Ibidem §. 180.
(d) §. 153.
(e) Lib. IX. §. 100.
(f) Lib. I. §. 78.
(g) Lib. IX. §. 97.
(h) §. 175.
(i) Lib. I. §. 128.
(k) Synop. Alg. § 266.
(l) Ibidem.

Digitized by Google

COROLLARIUM VII.

Recta abſcindens in axe directe ultra verticem producto ſegmentum æquale abſciſſæ, tangit parabolam in extremo puncto ſemiordinatæ, quæ illi abſciſſæ reſpondet.

178. Sic recta EF erit tangens parabolam BAC in puncto F, ſi ſegmentum EA axis AD directe ultra verticem A producti, fuerit æquale abſciſſæ A*a*, quæ ſemiordinatæ *a*F ductæ ad axim ex puncto F correſpondet. Etenim, producta in directum ſemiordinata F*a* uſque ad ſubdirectricem HK, conſtitutoque rectangulo M*ba*E, rectangulum M*ba*E erit duplum rectanguli H*ba*A ejuſdem baſis *ba* (a). Ejuſdem autem rectanguli H*ba*A duplum eſt etiam quadratum ſemiordinatæ *a*F (b). Ergo quadratum ſemiordinatæ *a*F adæquat rectangulum M*ba*E (c); ac proinde habetur ÷ *ba*. *a*F. E*a* (d). Igitur recta EF tangit parabolam BAC in puncto F (e).

Apoll. l. 1. p. 33

THEOREMA V.

In parabola recta quævis linea axi parallela biſariam dividit omnes rectas parallelas tangenti ductæ per illius extremum.

179. In parabola BAC ducatur recta quævis *a*H parallela illius axi AK, atque ex puncto *a* agatur tangens *a*F, quæ concurrat in puncto F cum axe AK directe ultra verticem A producto. Dico, rectam *a*H dividere biſariam omnes rectas parallelas tangenti *a*F.

Apoll. l. 1. p. 46

Deniq;

(a) Lib. IX. §. 100.
(b) §. 169.
(c) Lib I. §. 103.
(d) Lib. IX. §. 118.
(e) §. 170.

Digitized by Google

Demonſtratio.

I.

Spectetur primo recta D*e*, quæ directe producta concurrat ultra verticem cum axe AK in puncto G. Tum per puncta D, *e*, ſicuti etiam ex puncto contactus *a*, ducantur ſemiordinatæ *em*, *an*, DX ad axim, parallelę idcirco tangenti AE, quę concurrat cum ipſa *a*H in puncto E, rectaque *me* directe producatur in *d*. Itaque cum rectę EA, *dm*, *an*, *r*X ſint parallelę, ſicuti etiam rectę EH, AK, & anguli EAK, *dm*K, *an*K ſint recti (a), quadrilatera E*dm*A, *danm*, *ar*X*n*, E*r*XA erunt parallelogramma, & quidem rectangula; cumque triangula *a*F*n*, DGX, utpote ſibi mutuo ęquiangula, ſint ſimilia (b), triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut quadratum lateris *an* ad quadratum lateris homologi DX (c). Ut autem quadratum rectæ *an* ad quadratum rectę DX, ita eſt recta A*n* ad rectam AX (d), & ut recta A*n* ad rectam AX, ita eſt rectangulũ E*an*A ad rectangulum E*r*XA (e). Ergo triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut rectangulum E*an*A ad rectangulum E*r*XA (f). Conſtat autem, triangulum *a*F*n* ęquare rectangulum E*an*A (g); cum recta *n*F ſit dupla rectę *n*A (h), eademque ſit utriuſque altitudo *an*. Ergo triangulum quoque DGX ęquabit rectangulum E*r*XA (i). Eodem ratiocinio oſtendam, triangulum *e*G*m* æquare rectangulum E*dm*A. Igitur, ſi triangulo DGX auferatur triangulum *e*G*m*, & rectangulo E*r*XA rectangulum E*dm*A, reſiduum trapezium D*em*X æquabit reſiduum rectangulum *mdr*X (k). Quamobrem, ſi utrique itidem dematur commune ſpatium *mexr*X, reſiduum triangulum *xed* erit æquale reſiduo triangulo *xr*D (l). Duo autem iſta triangula ſunt ſimi- Fig. 4. T. XV.

(a) §. 24. & §. 14. lib IV.
(b) Lib. IX. §. 66.
(c) Ibidem §. 180.
(d) §. 153.
(e) Lib. IX. §. 100.
(f) Lib. I. §. 78.
(g) Lib. IX. §. 97.
(h) §. 175.
(i) Lib. I. §. 128.
(k) Synop. Alg. § 266.
(l) Ibidem.

Digitized by Google

COROLLARIUM VII.

Recta abſcindens in axe directe ultra verticem producto ſegmentum æquale abſciſſæ, tangit parabolam in extremo puncto ſemiordinatæ, quæ illi abſciſſæ reſpondet.

178. Sic recta EF erit tangens parabolam BAC in puncto F, ſi ſegmentum EA axis AD directe ultra verticem A producti, fuerit æquale abſciſſæ A*a*, quæ ſemiordinatæ *a*F ductæ ad axim ex puncto F correſpondet. Etenim, producta in directum ſemiordinata F*a* uſque ad ſubdirectricem HK, conſtitutoque rectangulo M*ba*E, rectangulum M*ba*E erit duplum rectanguli H*ba*A ejuſdem baſis *ba* (a). Ejuſdem autem rectanguli H*ba*A duplum eſt etiam quadratum ſemiordinatæ *a*F (b). Ergo quadratum ſemiordinatæ *a*F adæquat rectangulum M*ba*E (c); ac proinde habetur ∺ *ba*. *a*F. E*a* (d). Igitur recta EF tangit parabolam BAC in puncto F (e).

Apoll. l.1.p.33

THEOREMA V.

In parabola recta quævis linea axi parallela bifariam dividit omnes rectas parallelas tangenti ductæ per illius extremnm.

179. In parabola BAC ducatur recta quęvis *a*H parallela illius axi AK, atque ex puncto *a* agatur tangens *a*F, quæ concurrat in puncto F cum axe AK directe ultra verticem A producto. Dico, rectam *a*H dividere bifariam omnes rectas parallelas tangenti *a*F.

Apoll. l.1.p.46

Denique

(a) Lib. IX. §. 100.
(b) §. 169.
(c) Lib I. §. 103.
(d) Lib. IX. §. 118.
(e) §. 170.

Digitized by Google

Demonſtratio.

I.

Spectetur primo recta D*e*, quæ directe producta concurrat ultra verticem cum axe AK in puncto G. Tum per puncta D, *e*, ſicuti etiam ex puncto contactus *a*, ducantur ſemiordinatæ *em*, *an*, DX ad axim, parallelę idcirco tangenti AE, quę concurrat cum ipſa *a*H in puncto E, rectaque *me* directe producatur in *d*. Itaque cum rectę EA, *dm*, *an*, *r*X ſint parallelę, ſicuti etiam rectę EH, AK, & anguli EAK, *dm*K, *an*K ſint recti (a), quadrilatera E*dm*A, *danm*, *ar*X*n*, E*r*XA erunt parallelogramma, & quidem rectangula; cumque triangula *a*F*n*, DGX, utpote ſibi mutuo ęquiangula, ſint ſimilia (b), triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut quadratum lateris *an* ad quadratum lateris homologi DX (c). Ut autem quadratum rectæ *an* ad quadratum rectę DX, ita eſt recta A*n* ad rectam AX (d), & ut recta A*n* ad rectam AX, ita eſt rectangulũ E*an*A ad rectangulum E*r*XA (e). Ergo triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut rectangulum E*an*A ad rectangulum E*r*XA (f). Conſtat autem, triangulum *a*F*n* ęquare rectangulum E*an*A (g); cum recta *n*F ſit dupla rectę *n*A (h), eademque ſit utriuſque altitudo *an*. Ergo triangulum quoque DGX ęquabit rectangulum E*r*XA (i). Eodem ratiocinio oſtendam, triangulum *e*G*m* æquare rectangulum E*dm*A. Igitur, ſi triangulo DGX auferatur triangulum *e*G*m*, & rectangulo E*r*XA rectangulum E*dm*A, reſiduum trapezium D*em*X æquabit reſiduum rectangulum *mdr*X (k). Quamobrem, ſi utrique itidem dematur commune ſpatium *mexr*X, reſiduum triangulum *xed* erit æquale reſiduo triangulo *xr*D (l). Duo autem iſta triangula ſunt ſimi-

Fig. 4. T. XV.

(a) §. 24. & §. 14. lib IV.
(b) Lib. IX. §. 66.
(c) Ibidem §. 180.
(d) §. 153.
(e) Lib. IX. §. 100.
(f) Lib. I. §. 78.
(g) Lib. IX. §. 97.
(h) §. 175.
(i) Lib. I. §. 128.
(k) Synop. Alg. § 266.
(l) Ibidem.

Digitized by Google

COROLLARIUM VII.

Recta abſcindens in axe directe ultra verticem producto ſegmentum æquale abſciſſæ, tangit parabolam in extremo puncto ſemiordinatæ, quæ illi abſciſſæ reſpondet.

178. Sic recta EF erit tangens parabolam BAC in puncto F, ſi ſegmentum EA axis AD directe ultra verticem A producti, fuerit æquale abſciſſæ A*a*, quæ ſemiordinatæ *a*F ductæ ad axim ex puncto F correſpondet. Etenim, producta in directum ſemiordinata F*a* uſque ad ſubdirectricem HK, conſtitutoque rectangulo M*ba*E, rectangulum M*ba*E erit duplum rectanguli H*ba*A ejuſdem baſis *ba* (a). Ejuſdem autem rectanguli H*ba*A duplum eſt etiam quadratum ſemiordinatæ *a*F (b). Ergo quadratum ſemiordinatæ *a*F adæquat rectangulum M*ba*E (c); ac proinde habetur ∹ *ba*. *a*F. E*a* (d). Igitur recta EF tangit parabolam BAC in puncto F (e).

Apoll. l.1.p.33

THEOREMA V.

In parabola recta quævis linea axi parallela bifariam dividit omnes rectas parallelas tangenti ductæ per illius extremum.

179. In parabola BAC ducatur recta quęvis *a*H parallela illius axi AK, atque ex puncto *a* agatur tangens *a*F, quæ concurrat in puncto F cum axe AK directe ultra verticem A producto. Dico, rectam *a*H dividere bifariam omnes rectas parallelas tangenti *a*F.

Apoll. l.1.p.46

Denique

(a) Lib. IX. §. 100.
(b) §. 169.
(c) Lib I. §. 103.
(d) Lib. IX. §. 118.
(e) §. 170.

Digitized by Google

Demonſtratio.

I.

Spectetur primo recta D*e*, quæ directe producta concurrat ultra verticem cum axe AK in puncto G. Tum per puncta D, *e*, ſicuti etiam ex puncto contactus *a*, ducantur ſemiordinatæ *em*, *an*, DX ad axim, parallelę idcirco tangenti AE, quę concurrat cum ipſa *a*H in puncto E, rectaque *me* directe producatur in *d*. Itaque cum rectę EA, *dm*, *an*, *r*X ſint parallelę, ſicuti etiam rectę EH, AK, & anguli EAK, *dm*K, *an*K ſint recti (a), quadrilatera E*dm*A, *danm*, *ar*X*n*, E*r*XA erunt parallelogramma, & quidem rectangula; cumque triangula *a*F*n*, DGX, utpote ſibi mutuo ęquiangula, ſint ſimilia (b), triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut quadratum lateris *an* ad quadratum lateris homologi DX (c). Ut autem quadratum rectæ *an* ad quadratum rectę DX, ita eſt recta A*n* ad rectam AX (d), & ut recta A*n* ad rectam AX, ita eſt rectangulũ E*an*A ad rectangulum E*r*XA (e). Ergo triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut rectangulum E*an*A ad rectangulum E*r*XA (f). Conſtat autem, triangulum *a*F*n* ęquare rectangulum E*an*A (g); cum recta *n*F ſit dupla rectę *n*A (h), eademque ſit utriuſque altitudo *an*. Ergo triangulum quoque DGX ęquabit rectangulum E*r*XA (i). Eodem ratiocinio oſtendam, triangulum *e*G*m* æquare rectangulum E*dm*A. Igitur, ſi triangulo DGX auferatur triangulum *e*G*m*, & rectangulo E*r*XA rectangulum E*dm*A, reſiduum trapezium D*em*X æquabit reſiduum rectangulum *mdr*X (*k*). Quamobrem, ſi utrique itidem dematur commune ſpatium *mexr*X, reſiduum triangulum *xed* erit æquale reſiduo triangulo *xr*D (l). Duo autem iſta triangula ſunt ſimi- Fig. 4. T. XV.

(a) §. 24. & §. 14. lib IV.
(b) Lib. IX. §. 66.
(c) Ibidem §. 180.
(d) §. 153.
(e) Lib. IX. §. 106.
(f) Lib. I. §. 78.
(g) Lib. IX. §. 97.
(h) §. 175.
(i) Lib. I. §. 128.
(k) Synop. Alg. § 266.
(l) Ibidem.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Recta tangens parabolam, in uno dumtaxat puncto ipſam tangit.

171. Oſtenſum ſiquidem eſt, omnia puncta rectæ EF diverſa a puncto F cadere extra curvam parabolicam BAC.

COROLLARIUM II.

172. *Si in axe AD ſumatur ſegmentum* am *æquale rectæ* ab, *& ducatur ad punctum contactus F recta* mF, *hæc erit perpendicularis tangenti EF*. Quippe, cum ſit ∺ *ba*.*a*F. E*a*, erit quoque ∺ *ma*.*a*F, *a*E; & ideo angulus *m*FE erit rectus; cum rectangulum futurum ſit triangulum EF*m* (a).

DEFINITIO V.

173. In parabola, quemadmodum in ellipſi, recta *m*F dicitur *normalis* tangenti EF, *ſubnormalis* recta *am*, *ſubtangens* vero recta E*a*, quæ inter ſemiordinatam *a*F, & punctum concurſus E tangentis EF cum axe AD in directum ultra verticem producto intercipitur.

COROLLARIUM III.

In parabola ſubnormalis adæquat ſemiparametrum.

174. Nimirum *ſubnormalis ma* erit æqualis ſemiparametro HA. Etenim in rectangulo H*ba*A recta *ba* adæquat rectam HA (b). Recta autem *ma* poſita eſt æqualis rectæ *ba*. Ergo recta *ma* ſemiparametrum quoque HA æquabit (c).

CO-

(a) Lib. IX §. 74.
(b) Lib. VI. §. 20.
(c) Syn. Alg. §. 261.

Digitized by Google

COROLLARIUM IV.

Recta ſubtangens in parabola eſt dupla abſciſſæ, quæ reſpondet ſemiordinatæ ad axim ductæ ex puncto contactus.

175. Videlicet in parabola BAC, quæ tangatur a recta EF in puncto F, ducta ex puncto F ſemiordinata F*a* ad axim AD, ſubtangens E*a* eſt dupla abſciſſæ A*a*. Cum enim, ut ſupra oſtenſum eſt, quadratum ſemiordinatæ *a*F adęquet rectangulum M*ba*E, ſicuti quadratum ſemiordinatæ *a*F eſt duplum rectanguli H*ba*A (a), ita ejuſdem rectanguli H*ba*A duplum erit rectangulum M*ba*E (b). Duo autem rectangula M*ba*E, H*ba*A habent eandem baſim *ba*; ſuntque propterea eorum altitudines E*a*, A*a*, ut ipſa rectangula (c). Ergo erit E*a*=2A*a*.

COROLLARIUM V.

176. Hinc *ſegmentum EA ſubtangentis E*a, *quod extra parabolam reperitur, adæquat abſciſſam A*a. Non enim poteſt eſſe E*a*=2A*a*, niſi etiam ſit EA=A*a*. Apoll. l.1.p.35

COROLLARIUM VI.

Recta tangens parabolam in vertice axis inter tangentem lateralem, & ſubtangentem comprehenſa, eſt pars dimidia ſemiordinatæ ad axim ductæ ex puncto contactus.

177. Nimirum, iiſdem poſitis, recta A*n* eſt pars dimidia ſemiordinatæ *a*F. Quippe, cum, ſtante hypotheſi, ſit *a*F.A*n*=E*a*.EA (d), erit *a*F=2A*n*, quemadmodum eſt E*a*=2EA (e).

CO-

(a) §. 169.
(b) Lib. I. §. 102.
(c) Lib. IX. §. 104.
(d) Ibid §. 59.
(e) §. 175.

Digitized by Google

Demonſtratio.

I.

Spectetur primo recta D*e*, quæ directe producta concurrat ultra verticem cum axe AK in puncto G. Tum per puncta D, *e*, ſicuti etiam ex puncto contactus *a*, ducantur ſemiordinatæ *em*, *an*, DX ad axim, parallelę idcirco tangenti AE, quę concurrat cum ipſa *a*H in puncto E, rectaque *me* directe producatur in *d*. Itaque cum rectę EA, *dm*, *an*, *r*X ſint parallelę, ſicuti etiam rectę EH, AK, & anguli EAK, *dm*K, *an*K ſint recti (a), quadrilatera E*dm*A, *danm*, *ar*X*n*, E*r*XA erunt parallelogramma, & quidem rectangula; cumque triangula *a*F*n*, DGX, utpote ſibi mutuo ęquiangula, ſint ſimilia (b), triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut quadratum lateris *an* ad quadratum lateris homologi DX (c). Ut autem quadratum rectæ *an* ad quadratum rectę DX, ita eſt recta A*n* ad rectam AX (d), & ut recta A*n* ad rectam AX, ita eſt rectangulũ E*an*A ad rectangulum E*r*XA (e). Ergo triangulum *a*F*n* erit ad triangulum DGX, ut rectangulum E*an*A ad rectangulum E*r*XA (f). Conſtat autem, triangulum *a*F*n* ęquare rectangulum E*an*A (g); cum recta *n*F ſit dupla rectę *n*A (h), eademque ſit utriuſque altitudo *an*. Ergo triangulum quoque DGX ęquabit rectangulum E*r*XA (i). Eodem ratiocinio oſtendam, triangulum *e*G*m* æquare rectangulum E*dm*A. Igitur, ſi triangulo DGX auferatur triangulum *e*G*m*, & rectangulo E*r*XA rectangulum E*dm*A, reſiduum trapezium D*em*X æquabit reſiduum rectangulum *mdr*X (k). Quamobrem, ſi utrique itidem dematur commune ſpatium *mexr*X, reſiduum triangulum *xed* erit æquale reſiduo triangulo *xr*D (l). Duo autem iſta triangula ſunt ſimi- Fig. 4. T. XV.

(a) §. 24. & §. 14. lib IV.
(b) Lib. IX. §. 66.
(c) Ibidem §. 180.
(d) §. 153.
(e) Lib. IX. §. 100.
(f) Lib. I. §. 78.
(g) Lib. IX. §. 97.
(h) §. 175.
(i) Lib. I. §. 128.
(k) Synop. Alg. § 266.
(l) Ibidem.

Digitized by Google

ſimilia (a); cum æquales ſint inter ſe tum anguli *dxe*, D*xr* (b), tum anguli *xde*, *xr*D, tum anguli *dex*, *x*D*r* (c). Ergo latera ipſorum homologa *xe*, *x*D erunt æqualia (d). Itaque recta D*e* biſariam dividitur in puncto *x* a recta *a*H.

I I.

Sit modo recta VA parallela tangenti *a*F, eaque occurrat vertici A ipſius parabolæ, & ex puncto V agatur ad axim ſemiordinata VG. Perſpicuum eſt, triangulum VAG eſſe ſimile triangulo *a*F*n* (e), utpote illi æquiangulum. Igitur triangulum *a*F*n* erit ad triangulum VAG, ut quadratum lateris *an* ad quadratum lateris VG (f); ſive ut abſciſſa A*n* ad abſciſſam AG (g); ac proinde ut rectangulum E*an*A ad rectangulum E*s*GA (h). Demonſtravimus autem, triangulum *a*F*n* æquare rectangulum E*an*A. Ergo etiam triangulum VAG æquabit rectangulum E*s*GA (i); quocirca, ſublato communi trapezio *sy*AG, reſiduum triangulum V*ys* erit æquale reſiduo triangulo E*y*A (k). Hujuſmodi autem triangula ſunt ſimilia, quemadmodum oſtenſum eſt *num. præcedenti* de triangulis D*xr*, *dxe*. Ergo homologa ipſorum latera V*y*, *y*A ſunt æqualia (l); & ideo &c.

I I I.

Parallela demum tangenti *a*F ſit recta BM, quæ ita ſe habeat in parabola, ut ſecet ipſius axim AK in puncto *n*, & occurrat curvæ parabolicæ in puncto M. Ducta igitur ſemiordinata BK ad axim, atque ex puncto M ducta ordinata M*e*, per punctum *e* agatur recta DG eidem tangenti *a*F parallela, quæ conveniat cum axe ultra verticem in puncto G. Quoniam ergo triangula B*n*K, *a*F*n* ſunt ſimilia (m), triangulum B*n*K erit ad triangulum *a*F*n*, ut quadratum lateris

(a) Lib. IX. §. 66.
(b) Lib. III. §. 31.
(c) Lib. IV. §. 15.
(d) §. 110.
(e) Lib. IX §. 66.
(f) Ibidem §. 180.
(g) §. 153.
(h) Lib. IX. §. 100.
(i) Lib. I. § 121.
(k) Syn. Alg. §. 266.
(l) §. 110.
(m) Lib. IX. §. 66.

Digitized by Google

teris BK ad quadratum lateris *an* (a), ſeu ut abſciſſa AK ad abſciſſam A*n* (b), adeoque ut rectangulum EHKA ad rectangulum E*an*A (c). Triangulum autem *a*F*n* eſt æquale rectangulo E*an*A, ut *num. I.* demonſtravimus. Ergo triangulum quoque B*n*K erit æquale rectangulo EHKA (d). Rurſus quoniam rectæ *em*, *m*M ſunt æquales (e), ſicuti etiam anguli *em*G, *nm*M (f), necnon anguli G*em*, *n*M*m* (g), duo triangula *e*G*m*, *nm*M erunt æqualia (h). Oſtenſum eſt autem *num. I.* triangulum *e*G*m* æquare rectangulum E*dm*A: Ergo triangulum quoque *nm*M erit eidem rectangulo E*dm*A æquale (i). Quamobrem, ſi rectangulo EHKA dematur rectangulum E*dm*A, & reſiduo rectangulo H*dm*K adjiciatur triangulum *nm*M, triangulum B*n*K æquabit rectangulum H*dm*K una cum triangulo *nm*M; & ideo, ſublato utrique communi trapezio H*zn*K, reſiduum triangulum B*z*H æquabit reſiduum triangulum *dz*M (*k*). Hæc autem duo triangula ſunt ſimilia (l); cum ſint æquiangula, ut conſideranti perſpicuum fiet. Igitur latera ipſorum homologa B*z*, *z*M ſunt inter ſe æqualia (m); ac proinde recta BM biſariam dividitur a recta *a*H. Recta igitur *a*H biſariam dividit omnes rectas parallelas tangenti *a*F; ac propterea in parabola &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

In parabola recta quavis linea axi parallela eſt illius diameter ſecundaria.

180. Cum enim biſariam dividat omnes rectas tangenti parallelas, habet quidquid requiritur, ut ſit diameter ipſius parabolæ (n).

(a) Lib. IX. §. 180.
(b) §. 153.
(c) Lib. IX. §. 100.
(d) Lib. I. §. 188.
(e) §. 17.
(f) Lib III. §. 51.
(g) Lib. IV. §. 15.
(h) Lib. V. §. 94.
(i) Synop. Alg. §. 262.
(k) Ibidem §. 266.
(l) Lib. IX. §. 66.
(m) §. 110.
(n) §. 21.

COROLLARIUM II.

In parabola omnes diametri ſecundariæ ſunt axi parallelæ.

181. Ut ſi in parabola BAC, cujus axis ſit recta AK, ponatur recta PQ diameter, erit ipſa PQ parallela axi AK. Ducta enim ordinata NC ad ipſam diametrum PQ, biſariam ab illa ſecta erit in puncto S (a). Si autem recta PQ non eſt parallela axi AK, agatur ex eodem puncto P recta PR axi AK parallela. Hæc igitur biſariam dividet rectam NC (b), utpote parallelam tangenti ductæ per punctum P. Dividet autem recta PR ipſam NC in alio puncto, nempe T, ab illo diverſo, in quo ipſa eadem recta NC ſecatur a recta PQ, ut eſt manifeſtum. Id porro omnino repugnat. Ergo, ſi recta PQ eſt diameter parabolæ BAC, ipſius axi AK neceſſario eſt parallela.

Fig. 4. T. XV.

COROLLARIUM III.

In parabola quavis recta axi parallela dividit biſariam ſegmentum parabolicum determinatum a recta ordinatim illi applicata.

182. Sic recta *a*H in parabola BAC parallela axi AK biſariam dividit ſegmentum parabolicum B*a*MB determinatum a recta BM ipſi *a*H ordinatim applicata. Etenim, ſi tot ordinentur rectæ, quot ſunt puncta in abſciſſa *az*, cum ſingulæ a recta *a*H biſariam dividantur, elementa ſpatii parabolici B*az* erunt numero, & magnitudine æqualia elementis ſpatii *zа*M. Ergo hujuſmodi ſpatia erunt æqualia (c).

Fig. 4. T. XV.

THEO-

(a) §. 17.
(b) §. 23.
(c) Lib. IX. §. 58.

Digitized by Google

THEOREMA VI.

In parabola quadrata ſemiordinatarum ad quamlibet ſecundariam diametrum ſunt directe inter ſe, ut correſpondentes abſciſſæ.

183. Recta *a*H ſit una ex diametris ſecundariis parabolæ BAC, ad quam ordinentur rectæ De, VA, BM. Dico, quadratum ſemiordinatæ *xe* eſſe ad quadratum ſemiordinatæ *y*A, ut abſciſſa *ax* ad abſciſſam *ay*. Quadratum quoque ſemiordinatæ *y*A eſſe ad quadratum ſemiordinatæ *z*M, ut eſt abſciſſa *ay* ad abſciſſam *az*. Fig. 4. T. XV.

Demonſtratio.

Quoniam oppoſita latera E*a*, A*n* rectanguli E*an*A ſunt æqualia (a), ſicuti etiam rectæ FA, A*n* (b), duæ quoque E*a*, FA erunt æquales (c). Æquales ſunt autem inter ſe tum anguli LE*a*, LAF, tum anguli L*a*E, LFA (d) propter parallelismum rectarum E*a*, FA. Ergo duo triangula E*a*L, LAF erunt inter ſe æqualia (e). Hinc, ſi utrique addatur trapezium *ay*AL, triangulum E*y*A erit æquale quadrilatero *ay*AF (f). Similiter, ſi illis iiſdem triangulis adjiciatur figura *ar*XAL*a*, trapezium F*ar*X æquabit rectangulum AE*r*X. Demonſtravimus autem §. 179. *num. I.* triangulum DGX æquare rectangulum AE*r*X. Ergo triangulum quoque DGX æquabit trapezium F*ar*X (g); hiſque propterea ſublato ſpatio G*xr*XG, reliquum triangulum D*xr* erit æquale reliquo parallelogrammo *ax*GF (h). Triangulum autem *dxe* eſt æquale triangulo D*xr*, ut oſtenſum eſt §. 179. *num. I.* Ergo triangulum quoque *dxe* erit æquale parallelogrammo *ax*GF (i). Itaque cum triangulum *dxe* adæquet parallelogrammum

 *ax*GF

(a) Lib. VI. § 20.
(b) §. 176.
(c) Synop. Alg. §. 259.
(d) Lib. IV. §. 15.
(e) Lib. V. §. 94.
(f) Syn. Alg. §. 265.
(g) Ibidem §. 263.
(h) Ibid. §. 266.
(i) Ibid. §. 262.

Digitized by Google

*ax*GF, & triangulum E*y*A parallelogrammum *ay* AF, triangulum *dxe* erit ad parallelogrammum *ax* GF, ut triangulum E*y*A ad parallelogrammum *ay*AF; & *alternando*, ut parallelogrammum *ax*GF eſt ad parallelogrammum *ay*AF, ita erit triangulum *dxe* ad triangulum E*y*A (a). Parallelogrammum autem *ax*GF eſt ad parallelogrammum *ay*AF ejuſdem altitudinis AE, ut eſt baſis *ax* ad baſim *ay* (b). Igitur triangulum quoque *dxe* erit ad triangulum E*y*A, ut abſciſſa *ax* ad abſciſſam *ay* (c). Ut autem triangulum *dxe* ad triangulum E*y*A, ita eſt quadratum lateris *xe* ad quadratum lateris *y*A (d); cum illa triangula ſint ſimilia (e), utpote æquiangula. Ergo etiam quadratum rectæ *xe* erit ad quadratum rectæ *y*A, ut abſciſſa *ax* ad abſciſſam *ay* (f).

Rurſus quoniam ex §. 179. *num. III.* triangulum B*n*K adæquat rectangulum EHKA, ſi utrique dematur trapezium *nz*HK, reliquum triangulum B*z*H erit æquale reliquo trapezio E*zn*A (g). Triangulum autem M*dz* adæquat triangulum B*z*H, ut patet ex eodem *num. III.* §. 179. Ergo triangulum quoque M*dz* æquabit trapezium E*zn*A (h). Demonſtravimus porro eodem §. *num. I.*, triangulum *e*G*m* æquare parallelogrammum E*dm*A. Igitur, ſi trapezio E*zn*A dematur parallelogrammum E*dm*A, & reſiduo *dznm* adjiciatur triangulum *e*G*m*, erit trapezium *dznm* una cum triangulo *e*G*m* æquale trapezio E*zn*A, adeoque etiam triangulo M*dz* (i). Conſtat porro, triangulum *dxe* æquare parallelogrammum *ax*GF. Ergo, ſi trapezio *dznm* auferatur triangulum *dxe*, & reſiduo *xznme* addatur parallelogrammum *ax*GF, erit ſpatium *xznme* una cum parallelogrammo *ax*GF æquale trapezio *dznm*. Si vero ſpatio *xznme* una cum parallelogrammo *ax*GF adjiciatur triangulum *e*G*m*, trapezio autem *dznm* addatur parallelogrammum E*dm*A, ſicuti triangulum *e*G*m* adæquat parallelogrammum E*dm*A, ita, quod ex illa priori ſumma emergit, parallelogrammum *azn*F æquabit trapezium

(a) Lib. I. §. 125.
(b) Lib. IX. §. 95.
(c) Lib. I. § 77.
(d) Ibid. §. 180.
(e) Ibidem §. 66.
(f) Lib. I. §. 77.
(g) Syn. Alg. §. 264.
(h) Ibidem §. 262.
(i) Ibid. §. 261.

Digitized by Google

zium itidem ex poſteriori additione conſurgens E*zn*A (a). Oſtenſum eſt autem, triangulum M*dz* æquare trapezium E*zn*A. Ergo triangulum M*dz* æquale itidem erit parallelogrammo *azn*F (b); & ideo, cum triangulum E*y*A jam oſtenſum ſit æquale parallelogrammo *ay*AF, triangulum E*y*A erit ad parallelogrammum *ay*AF, ut triangulum M*dz* ad parallelogrammum *azn*F, & *alternando*, triangulum E*y*A erit ad triangulum M*dz*, ut eſt parallelogrammum *ay*AF ad parallelogrammum *azn*F (c). Parallelogrammum autem *ay*AF eſt ad parallelogrammum *azn*F ejuſdem altitudinis *na*, ut baſis, ſeu abſciſſa *ay* ad baſim, ſive ad abſciſſam *az* (d). Ergo etiam triangulum E*y*A erit ad triangulum M*dz*, ut eſt abſciſſa *ay* ad abſciſſam *az* (e); & quoniam, ut triangulum E*y*A ad triangulum M*dz*, ita eſt quadratum lateris *y*A ad quadratum lateris *z*M (f), ex eo nimirum, quod illa triangula, utpote æquiangula, ſint ſimilia. Igitur etiam quadratum rectæ *y*A erit ad quadratum rectæ *z*M, ut eſt abſciſſa *ay* ad abſciſſam *az* (g). Itaque in parabola &c. quod erat oſtendendum.

S C H O L I O N.

184. Sicuti *parameter* axis parabolæ eſt recta ducta ex illius vertice ordinatis parallela, illius quidem longitudinis, ut rectangulum ſub illa, & ſub abſciſſa contentum ſit æquale quadrato correſpondentis ſemiordinatæ, ita *parameter cujuslibet ſecundariæ diametri parabolæ eſt recta ducta ex illius vertice ordinatis ad ipſam diametrum parallela, adeoque ipſam parabolam tangens, cujus longitudo tanta eſt, ut rectangulum, quod ſub illa, & ſub quavis abſciſſa comprehenditur, ſit æquale quadrato ſemiordinatæ, quæ illi abſciſſæ correſpondet*. Hinc

185.

(a) Syn. Alg. §. 265.
(b) Ibidem §. 261.
(c) Lib. I. §. 125.
(d) Lib. IX. §. 95.
(e) Lib. I §. 77.
(f) Lib. IX. §. 110.
(g) Lib. I. §. 77.

Digitized by Google

I.

185. *In parabola quadratum cujuslibet ſemiordinatæ ad quamcumque diametrum ſecundariam adæquat rectangulum contentum ſub parametro, & ſub correſpondente abſciſſa* (a); ac proinde

II.

186. *Parameter cujuſvis ſecundariæ diametri parabolæ eſt tertia proportionalis poſt abſciſſam, & correſpondentem ſemiordinatam* (b).

THEOREMA VII.

Si ex quovis puncto curvæ parabolicæ ducantur duæ rectæ lineæ in parabola, quarum altera ſit axi parallela, altera ipſi axi occurrat in puncto, cujus diſtantia a vertice ſit æqualis quartæ parti parametri, duæ hujuſmodi rectæ lineæ cum recta tangente ducta per illud punctum duos æquales angulos efficiunt.

187. Ex quovis puncto K curvæ parabolicæ BAC ducantur in ipſa parabola duæ rectæ lineæ KL, K*a*, quarum altera KL ſit parallela axi AD, altera vero K*a* occurrat ipſi axi in puncto *a*, cujus diſtantia *a*A a vertice A ſit æqualis quartæ parti AG parametri AE ipſius axis, & per punctum K ducatur tangens FM occurrens axi in puncto F. Dico, angulos *a*KF, LKM, quos in puncto K efficiunt rectæ K*a*, KL cum tangente FM, eſſe inter ſe æquales.

Fig. 5. T. XV.

Demonſtratio.

Ex puncto K ducatur ad axim ſemiordinata K*b*, & ex ver-

(a) Vide demonſtrat. §. 162. (b) Vide demonſtrat. §. 165.

vertice A tangens AH, quæ ſemiordinatæ K*b* erit parallela (a). Quoniam igitur recta *b*K eſt dupla rectæ AH (b), quadratum ſemiordinatæ *b*K erit quadruplum quadrati rectæ AH (c). Quadratum autem rectæ *b*K adæquat rectangulum E*d b*A contentum ſub parametro AE, & ſub abſciſſa A*b* (d). Ergo etiam rectangulum E*db*A erit quadruplum quadrati rectæ AH (e). Manifeſtum porro eſt, rectangulum E*db*A quadruplum eſſe rectanguli G*eb*A contenti ſub eadem abſciſſa A*b*, & ſub quarta parte AG parametri (f). Ergo rectangulum G*eb*A erit æquale quadrato rectæ AH (g); & quoniam rectangulum NGAF adæquat rectangulum G*eb*A (h), propterea quod recta FA rectæ A*b* ſit æqualis (i); rectangulum quoque NGAF erit æquale quadrato rectæ AH (k); ac proinde recta AH eſt media proportionalis inter rectas FA, Aa (l); cumque recta AH ad perpendiculum rectæ F*a* incumbat, angulus FH*a* erit rectus (m), utpote in ſemicirculo, qui circa rectam F*a*, veluti diametrum, deſcribi poteſt, conſiſtens. Igitur etiam angulus *a*HK erit rectus (n). Latera autem FH, HK triangulorum *a*HF, *a*HK latus commune habentium *a*H, ſunt æqualia; cum propter paralleliſmum rectarum AH, *b*K, ſit FK . FH=F*b* . FA (o), adeoque FK=2FH, ſeu FH=HK, ſicuti eſt F*b*=2FA (p). Ergo recta quoque *a*F erit æqualis rectæ *a*K (q), & ideo etiam angulus *a*KF angulo *a*FK (r). Manifeſtum porro eſt, angulum LKM æquare angulum *a*FK (s); cum duæ F*a*, KL poſitæ ſint parallelæ. Ergo angulus LKM angulum quoque *a*KF æquabit (t). Itaque ex quovis puncto &c. quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) §. 22.
(b) §. 177.
(c) Lib. IX. §. 172.
(d) §. 162.
(e) Lib. I. §. 102.
(f) Lib. IX. §. 95.
(g) Lib. I. §. 115.
(h) Lib. IX. §. 88.
(i) §. 176.
(k) Syn. Alg. §. 262.
(l) Lib. IX. §. 118.
(m) Lib. VII. §. 75.
(n) Lib. III. §. 40.
(o) Lib. IX §. 57.
(p) §. 175.
(q) Lib. V. §. 73.
(r) Ibid. §. 60.
(s) Lib. IV. §. 14.
(t) Syn. Alg. §. 261.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

188. *Omnes idcirco luminis radii incidentes in curvam parabolicam BAC axi AD paralleli, poſt reflexionem in puncto a ipſius axis ſimul uniuntur.* Neque enim ex illa curva ita reflecti poſſunt, ut angulus reflexionis ſit æqualis angulo incidentiæ, prout lex naturæ poſtulat, quin omnes occurrant axi AD in puncto *a*. Punctum igitur *a* eſt *focus*, ſive *umbilicus* parabolæ BAC (a).

COROLLARIUM II.

189. Hinc *focus*, ſive *umbilicus* parabolæ eſt *punctum ſumtum in illius axe, cujus diſtantia a vertice eſt æqualis quartæ parti ejuſdem parametri.*

THEOREMA VIII.

Semiordinata ad axim in parabola ducta ex ejus foco adæquat ſemiparametrum ipſius axis.

190. Focus parabolæ BAC ſit punctum *a*, ex quo ducatur ſemiordinata *ab* ad ipſum axim. Dico, rectam *ab* æquare dimidiam partem AG parametri AE.

Demonſtratio.

Fig. 6. T. XV. Cum quadratum *ad* ſemiordinatæ *ab* ſit æquale rectangulo E*a* (b), & abſciſſa A*a* ſit quarta pars parametri AE (c), ſicuti rectangulum E*a* eſt quarta pars quadrati EFHA ipſius parametri AE (d), ita ejuſdem quadrati EFHA erit quarta pars quadratum *ad* (e). Quadratum autem A*e* ſemiparametri AG eſt itidem in ratione *ſubquadrupla* ad quadratum

(a) §. 20.
(b) §. 169.
(c) §. 189.
(d) Lib. IX. §. 100.
(e) Lib. I. §. 102.

Digitized by Google

tum EFHA (a). Ergo quadratum *ad* ſemiordinatæ *ab* erit æquale quadrato A*e* ſemiparametri AG (b); adeoque etiam ſemiordinata *ab* ſemiparametro AG erit æqualis (c). Igitur ſemiordinata ad axim &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA IX.

*Summa rectarum LK, K*a*, quæ cum tangente FM in parabola BAC æquales angulos LKM,* a*KF conſtituunt, eſt æqualis rectæ DA una cum recta* a*A, ſeu cum diſtantia foci* a *a vertice A.*

191. Ex puncto contactus K ducatur ad axim AD ſemiordinata K*b*.

Demonſtratio.

Quoniam recta A*b* eſt æqualis rectæ AF (d), erit A*b*+A*a* = F*a* (e). Oſtenſum eſt autem, rectam *a*K æquare rectam *a*F (f). Ergo recta *a*K æqualis itidem erit rectæ A*b* una cum recta A*a* (g). Conſtat autem, in parallelogrammo K*b*DL rectam KL eſſe æqualem rectæ *b*D (h). Igitur duæ rectæ LK, K*a* ſimul ſumtæ æquabunt rectam AD una cum recta A*a* (i). Itaque ſumma &c. quod erat oſtendendum. Fig. 5. T. XV.

(a) Lib. IX. §. 172.
(b) Lib. I. §. 103.
(c) Ibid. §. 187.
(d) §. 176.
(e) Synop. Alg. §. 265.
(f) §. 187.
(g) Synop. Alg. §. 261.
(h) Lib. VI. §. 20.
(i) Synop. Alg. §. 265.

Digitized by Google

CAPUT QUARTUM.

De Hyperbola.

DEFINITIO I.

192. *Coni ad verticem oppoſiti dicuntur illi, qui emergunt ex completa revolutione rectæ lineæ circa unum ſui punctum ab illius extremis diverſum plane immobile.* Ut ſi circa punctum A omnino quieſcens ita moveri concipiatur recta BP, ut ſuis extremis punctis B, P peripherias duorum circulorum BDC, NSP deſcribat, coni BAC, NAP ex hac revolutione emergentes, *ad verticem oppoſiti* nuncupantur.

Fig. 7. T. XV.

COROLLARIUM.

193. *Habent ergo coni ad verticem oppoſiti eundem verticem, & partes ejuſdem rectæ lineæ pro axe, atque inſuper eadem recta linea latus utriuſque coni ſimul determinat.*

DEFINITIO II.

194. *Hyperbola dicitur illa ſectio coni, quæ determinatur plano ea ratione conum ſecante, ut ejus quoque baſim diſpeſcat, quin oppoſito lateri ipſius coni ſit parallelum; ac proinde ſectio iſta hujuſmodi eſt, ut illius axis occurrat lateri oppoſito ultra verticem directe producto.* Talis itaque eſt ſectio DEF coni recti BAC. Quandoquidem planum ipſam determinans, baſim ſecat BDCF, ejuſque axis GE oppoſito lateri CA ultra verticem A producto occurrit, atque in puncto Z ei copulatur.

Fig. 7. T. XV.

DE-

DEFINITIO III.

195. *Oppoſitæ hyperbolæ vocantur illæ, quæ in conis ad verticem oppoſitis eodem plano ſecante determinantur*. Hujuſmodi ſunt in conis oppoſitis BAC, NAP ſectiones DEF, SZV.

COROLLARIUM.

196. *Eadem recta linea determinat in hyperbolis oppoſitis earum axim, & verticem.* Sic recta TG determinat in oppoſitis hyperbolis DEF, SZV axes EG, ZT, & vertices E, Z. Eſt enim recta TG communis ſectio plani, quo fiunt ſectiones ipſæ hyperbolicæ, & plani, quo determinantur triangula BAC, NAP per axim; atque adeo quo utriuſque itidem hyperbolæ axis determinatur (a).

DEFINITIO IV.

197. *Axis tranſverſus hyperbolarum oppoſitarum eſt recta linea utrique ipſarum vertici interjecta*. Sic recta EZ dicitur *axis tranſverſus* hyperbolarum oppoſitarum DEF, SZV.

DEFINITIO V.

198. *Centrum hyperbolarum oppoſitarum eſt punctum medium tranſverſi axis*. Hujuſmodi eſt punctum R in hyperbolis oppoſitis DEF, SZV.

SCHOLION.

199. Cum nulla ſit hyperbola, quam alia oppoſita comitari nequeat, *axis tranſverſus*, & *centrum* hyperbolarum oppoſitarum dicitur etiam *axis tranſverſus*, & *centrum* hyperbolæ, quæ ſolitarie, nempe nulla plane ratione habita op- Fig. 1. T. XV.

 poſitæ

(a) §. 13.

poſitæ hyperbolæ, ſpectatur. Sic recta EA dicitur *axis tranſverſus* hyperbolæ CAB, ejuſque *centrum* punctum illius medium M.

DEFINITIO VI.

200. *Hyperbolæ ſimiles, & æquales dicuntur illæ, in quibus ordinatæ, adeoque etiam ſemiordinatæ ad axim, æqualiter reſpective a ſuo vertice diſtantes, ſunt æquales.* Hujuſmodi erunt
Fig. 7. T. XV. hyperbolæ DFE, SZV, ſi poſita æqualitate abſciſſarum E*a*, Z*y*, ordinatæ *bd*, *xz*, ſicuti etiam ſemiordinatæ *ba*, *xy* fuerint æquales.

THEOREMA I.

In hyperbola quadrata ſemiordinatarum ad axim ſunt, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus abſciſſis, & ſub recta compoſita ex iiſdem abſciſſis, & ex axe tranſverſo.

Fig. 7. T. XV. Apoll. l. 1. p. 21 201. In cono recto BAC ſpectetur ſectio hyperbolica DEF, cujus axis ſit recta EG, axis tranſverſus ZE, & ſemiordinatæ ad axim rectæ *ba*, *me*. Dico, quadratum ſemiordinatæ *ba* eſſe ad quadratum ſemiordinatæ *me*, ut eſt rectangulum ex E*a* in Z*a* ad rectangulum ex E*e* in Z*e*.

Demonſtratio.

Triangulum per axim ita ſecet planum hyperbolicum DEF, ut recta DG ad perpendiculum inſiſtat diametro BC circuli baſeos. Tum per puncta *a*, *e* ducantur rectæ HK, LM in plano ipſius trianguli per axim parallelæ diametro BC, & cum rectæ *ba*, *me* ſint itidem parallelæ rectæ DG (a), planum, in quo ſint rectæ HK, *ba*, erit parallelum baſi BDC, ſicuti etiam planum, in quo ſint rectæ LM, *me*. Igitur ſectiones H*b*K*d*, L*m*M*n* erunt circuli (b), quorum dia-

(a) §. 17. (b) Lib. XI §. 91.

Digitized by Google

diametri erunt rectæ HK, LM, ipſiſque ad perpendiculum incumbent rectæ *ba*, *me*, quemadmodum recta DG eſt perpendicularis diametro BC. Quadratum ergo ſemiordinatæ *ba* erit æquale rectangulo ex H*a* in *a*K, & quadratum ſemiordinatæ *me* rectangulo ex L*e* in *e*M (a); ac proinde quadratum ſemiordinatæ *ba* erit ad rectangulum ex H*a* in *a*K, ut quadratum ſemiordinatæ *me* ad rectangulum ex L*e* in *e*M, & *alternando*, ratio quadrati ſemiordinatæ *ba* ad quadratum ſemiordinatæ *me* diverſa non erit a ratione rectanguli ex H*a* in *a*K ad rectangulum ex L*e* in *e*M (b). Ratio autem rectanguli H*a* × *a*K ad rectangulum L*e* × *e*M componitur ex ratione rectæ H*a* ad rectam L*e*, & ex ratione rectæ *a*K ad rectam *e*M, ſcilicet baſium, & altitudinum (c). Ergo etiam quadratum ſemiordinatæ *ba* erit ad quadratum ſemiordinatæ *me* in ratione compoſita ex ratione rectę H*a* ad rectam L*e*, & ex ratione rectę *a*K ad rectam *e*M. Manifeſtum eſt autem propter paralleliſmum rectarum H*a*, L*e* in triangulo LE*e*, eſſe E*a*. E*e* = H*a*. L*e*, & in triangulo *e*ZM haud diſſimili ratione eſſe *a*K. *e*M = Z*a*. Z*e* (d). Ergo ratio quadrati ſemiordinatę *ba* ad quadratum ſemiordinatę *me* ſpectari itidem poteſt veluti compoſita ex ratione rectæ E*a* ad E*e*, & ex ratione rectæ Z*a* ad rectam Z*e*. Conſtat porro, rectangulum quoque ex E*a* in Z*a* eſſe ad rectangulum ex E*e* in Z*e* in ratione compoſita ex ratione rectæ E*a* ad rectam E*e*, & ex ratione, quam habet recta Z*a* ad rectam Z*e* (d). Ergo ratio quadrati ſemiordinatæ *ba* ad quadratum ſemiordinatæ *me* diverſa non erit a ratione rectanguli ex E*a* in Z*a* ad rectangulum ex E*e* in Z*e* (f). Igitur in hyperbola &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Lib. IX. §. 113.
(b) Lib I. § 125.
(c) Lib. IX. §. 105.
(d) Ibidem § 59.
(e) Ibid. §. 105.
(f) Lib. I. §. 76.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

In hyperbola quadrata ſemiordinatarum ad axim habent omnia eandem rationem ad ſuum reſpective rectangulum contentum ſub abſciſſa, & ſub recta compoſita ex abſciſſa, & ex axe tranſverſo.

202. Videlicet in hyperbola DEF quadratum ſemiordinatæ *ba* eſt ad rectangulum ex E*a* in Z*a*, ut quadratum alterius cujuslibet ſemiordinatæ *me* ad rectangulum ex E*e* in Z*e*. Cum enim quadratum rectæ *ba* ſit ad quadratum rectæ *me*, ut rectangulum E*a* × Z*a* ad rectangulum E*e* × Z*e*, *alternando*, quadratum rectæ *ba* erit ad rectangulum E*a* × Z*a*, ut quadratum *me* ad rectangulum E*e* × Z*e* (a).

DEFINITIO VII.

203. *Parameter tranſverſi axis hyperbolæ eſt recta linea ducta ex illius vertice, ordinatis ad axim parallela, cujus ratio ad ipſum axim tranſverſum eadem eſt cum illa, quam habet quadratum cujuslibet ſemiordinatæ ad rectangulum contentum ſub correſpondente abſciſſa, & ſub recta compoſita ex ipſa abſciſſa, & ex axe tranſverſo*. Ut ſi in hyperbola CAB, cujus axis
Fig. 1. T. XV. tranſverſus ſit recta EA ducatur ex vertice A recta AF ſemiordinatis *ba*, CD parallela, cujus ratio ad axim tranſverſum EA ab ea non ſit diverſa, quam habet quadratum unius ſemiordinatæ *ba* ad rectangulum ex A*a* in E*a*, recta AF erit *parameter* hyperbolæ CAB. Recta AF dicitur etiam *latus rectum* ipſius hyperbolæ, & axis EA *latus* ejuſdem *tranſverſum*.

COROLLARIUM.

204. Hinc *parameter tranſverſi axis hyperbolæ ad perpendiculum ipſi axi incumbit, ipſamque hyperbolam in vertice tangit,*

(a) Lib. I. § 125.

Digitized by Google

git, ut etiam diximus de parametro axis ellipſeos, & parabolæ.

DEFINITIO VIII.

205. Quemadmodum in ellipſi, ita in hyperbola CAB rectangulum RFAE contentum ſub parametro AF, & ſub axe tranſverſo EA dicitur *figura tranſverſi axis* EA.

DEFINITIO IX.

206. Si parameter AF tranſverſi axis EA fuerit ipſi axi ęqualis, hyperbola CAB vocatur *æquilatera*.

DEFINITIO X.

207. *In hyperbola axis alteri conjugatus dicitur recta tranſiens per illius centrum, atque biſariam in illo diviſa, tantæ longitudinis, ut ſit media proportionalis inter axim ipſum tranſverſum, ejuſque parametrum*. Ut ſi in hyperbola BAC, cujus axis tranſverſus ſit recta EA, parameter recta AK, per centrum O tranſeat recta GH, quę in illo biſariam, atque ad rectos angulos dividatur, ſitque media proportionalis inter axim tranſverſum EA, & illius parametrum AK, recta HG vocatur alter axis ipſius hyperbolę BAC priori EA conjugatus, quatenus nempe hujuſmodi eſt axis conjugatus in ellipſi (a). Hinc Fig 10. T. XV.

COROLLARIUM I.

208. *Quadratum axis conjugati in hyperbola adæquat rectangulum contentum ſub axe tranſverſo, ejuſque parametro, nempe rectangulum figuræ axis tranſverſi* (b).

CO-

(a) §. 11. (b) Lib IX. §. 111.

Digitized by Google

COROLLARIUM II.

209. *In hyperbola quadratum ſemiaxis conjugati eſt quarta pars rectanguli figuræ axis tranſverſi.* Oſtenditur eodem modo, quo §. 83. idipſum demonſtravimus de quadrato ſemiaxis conjugati in ellipſi.

DEFINITIO XI.

210. Hyperbolæ KGL, MHN, quarum axis tranſverſus GH eſt conjugatus tranſverſo axi EA hyperbolarum BAC, DEF, conjugatæ vocantur.

SCHOLION.

211. Quemadmodum axis conjugatus GH eſt media proportionalis inter axim tranſverſum EA hyperbolarum BAC, DEF, ejuſque parametrum (a), ita axis EA eſt media proportionalis inter axim ſibi conjugatum GH, & illius parametrum. Propterea, ut in ellipſi, ita in hyperbola

I.

212. *Axes conjugati ſunt duæ mediæ continuo proportionales inter ſuos parametros.*

II.

213. *Si axes conjugati fuerint æquales, eorum quoque parametri erunt æquales tum inter ſe, tum ipſis axibus. Erunt vero inæquales tum inter ſe, tum ipſis axibus, ſi axes fuerint inæquales.*

214.

(a) §. 207.

Digitized by Google

III.

214. *Ex conjugatis axibus, qui major eſt, habet parametrum tam ſeipſo, quam altero axe minorem. Qui autem eſt minor, habet parametrum altero axe, ſeque ipſo majorem.*

DEFINITIO XII.

215. *Regulatrix, ſive directrix hyperbolæ eſt recta linea ducta ex puncto extremo axis tranſverſi per extremum parametri ejuſdem axis. Subdirectrix vero, ſive ſubregulatrix eſt recta ducta ex centro hyperbolæ per medium parametri.* Ut ſi recta EA fuerit axis tranſverſus hyperbolæ CAB, recta AG illius parameter, & punctum M ejuſdem centrum, recta EH erit *regulatrix*, ſive *directrix* ipſius hyperbolæ CAB. *Subdirectrix* autem, ſeu *ſubregulatrix* recta MQ. Fig. 1. T. XV.

COROLLARIUM.

216. *Subregulatrix hyperbolæ eſt parallela ejuſdem regulatrici.* Patet ex dictis de *ſubdirectrice* ellipſeos (a).

THEOREMA II.

In hyperbola quadratum cujuslibet ſemiordinatæ ad axim adæquat rectangulum ex abſciſſa, & ex ipſa ſemiordinata uſque ad directricem producta.

217. In hyperbola CAB, cujus axis tranſverſus ſit recta EA, parameter recta AF, & regulatrix recta EP, ſumatur ſemiordinata DC. Dico, hujus quadratum æquare rectangulum ADPe contentum ſub abſciſſa AD, & ſub recta DP, Fig. 1. T. XV. Apoll. l. 1. p. 12

(a) §. 80.

Demonſtratio.

Cum enim quadratum rectæ DC ſit ad rectangulum ex DA in DE, ut parameter AF ad axim tranſverſum EA (a), ſitque AF . AE = DP . DE (b), quadratum ſemiordinatæ DC erit ad rectangulum ex DA in DE, ut eſt recta DP ad rectam DE (c). Ut autem recta DP ad rectam DE, ita eſt rectangulum ex DP in DA ad rectangulum ex DE in eandem DA (d). Ergo quadratum rectæ DC erit ad rectangulum ex DA in DE, ut eſt rectangulum ex DP in DA, ſcilicet ADP*e*, ad idem rectangulum ex DA in DE (e). Igitur quadratum ſemiordinatæ DC adæquat rectangulum ADP*e* (f); ac proinde in hyperbola &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Semiordinatæ ad axim in hyperbola eo minores ſunt, quo vertici ſunt propiores.

218. Sic in hyperbola CAB ſemiordinata *ab* proximior vertici A eſt minor remotiore DC. Etenim, cum quadratum ſemiordinatæ *ab* ſit æquale rectangulo A*adx*, & quadratum ſemiordinatæ DC rectangulo ADP*e*, ſicuti rectangulum A*adx* deficit a rectangulo ADP*e*, ita quadratum ſemiordinatæ *ab* deficiet a quadrato ſemiordinatæ DC; adeoque etiam recta *ab* minor erit recta DC.

COROLLARIUM II.

Etiam ordinatæ ad axim in hyperbola eo majores ſunt, quo magis a vertice recedunt.

219. Ordinatæ namque ſunt inter ſe, ut ſemiordinatæ (g).

CO-

(a) §. 203.
(b) Lib. IX. §. 60.
(c) Lib. I. §. 78.
(d) Lib. IX §. 95.
(e) Lib. I. §. 76.
(f) Ibid. §. 103.
(g) Ibid. §. 127.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

In hyperbola quadratum cujuslibet ſemiordinatæ ad axim excedit rectangulum contentum ſub parametro, & abſciſſa; atque hujuſmodi exceſſus eſt rectangulum ſimile rectangulo figuræ axis tranſverſi.

220. Nimirum in hyperbola CAB quadratum ſemiordinatæ *ab* excedit rectangulum A*ab*F contentum ſub parametro AF, & ſub abſciſſa A*a*. Manifeſtum quippe eſt, quadratum ſemiordinatæ *ab* æquare rectangulum A*adx* (a), quod ſuperat rectangulum A*ab*F quantitate rectanguli F*bdx*. Conſtat quoque, rectangulum F*bdx* eſſe ſimile rectangulo EAFR (b), quod eſt figura tranſverſi axis AE (c).

SCHOLION.

221. Propter hunc exceſſum propterea iſta coni ſectio *hyperbola*, nempe *excedentis*, nomen obtinuit.

COROLLARIUM IV.

222. Hinc ſpectando hyperbolam extra conum, definiri poteſt: *Figura plana, curva linea in ſe minime redeunte comprehenſa, in qua ſemiordinatarum ad axim quadrata majora ſunt rectangulis contentis ſub parametro, & ſub correſpondentibus abſciſſis, & quidem ea conſtanti lege, ut hujuſmodi exceſſus ſint rectangula omnino ſimilia rectangulo figuræ axis tranſverſi.*

(a) §. 217.
(b) Lib.IX. §.16.
(c) §. 205.

COROLLARIUM V.

In hyperbola quadrata ſemiordinatarum ad axim magis creſcunt in receſſu a vertice, quam augeantur correſpondentes abſciſſæ.

223. Videlicet quadratum ſemiordinatæ DC in hyperbola CAB magis ſuperat quadratum ſemiordinatæ *ab*, quam abſciſſa AD excedat abſciſſam A*a*. Cum enim quadratum ſemiordinatæ DC ſit æquale rectangulo ADP*e*, & quadratum ſemiordinatæ *ab* rectangulo A*adx*, exceſſus quadrati ſemiordinatæ DC ſupra quadratum ſemiordinatæ *ab* erit æqualis exceſſui rectanguli ADP*e* ſupra rectangulum A*adx*. Rectangulum autem ADP*e* magis ſuperat rectangulum A*adx*, quam rectangulum ADOF excedat rectangulum A*ab*F. Ergo quadratum quoque ſemiordinatæ DC magis ſuperabit quadratum ſemiordinatæ *ab*, quam rectangulum ADOF excedat rectangulum A*ab*F. Conſtat autem, abſciſſam AD ita excedere abſciſſam A*a*, quemadmodum rectangulum ADOF excedit rectangulum A*ab*F; cum abſciſſa AD ſit ad abſciſſam A*a*, ut rectangulum ADOF ad rectangulum A*ab*F (a). Ergo quadratum ſemiordinatæ DC magis quoque ſuperabit quadratum ſemiordinatæ *ab*, quam abſciſſa AD abſciſſam A*a*; adeoque &c.

Fig. 8. T. XV.

COROLLARIUM VI.

224. Hinc aliter quoque definiri poteſt hyperbola, videlicet eam eſſe *figuram planam curva linea in ſe minime redeunte comprehenſam, in qua ſemiordinatarum ad axim quadrata magis creſcunt in receſſu a vertice, quam augeantur correſpondentes abſciſſæ.*

COROL-

(a) Lib. IX. §. 99.

COROLLARIUM VII.

In hyperbola quavis ſemiordinata ad axim eſt media proportionalis inter abſciſſam, & rectam ſibi correſpondentem, contentam inter axim, & rectam hyperbolæ directricem.

225. Semiordinata nimirum *ab* ad axim AD in hyperbola CAB eſt media proportionalis inter abſciſſam A*a*, & rectam *ad*. Cum enim quadratum rectæ *ab* ſit æquale rectangulo ex A*a* in *ad* (a); erit ∺ A*a*.*ab*.*ad* (b).

THEOREMA III.

In hyperbola CAB, cujus axis ſit recta AD, parameter AG, ſubdirectrix MQ; ſi producatur ſemiordinata ba *uſque ad ſubdirectricem, quadratum ipſius* ba *erit duplum trapezii* NyaA.

226. Producta uſque ad directricem EH ipſa ſemiordinata *ba*, ex vertice A ad extremum V agatur recta AV.

Demonſtratio.

Coincidit cum ea, qua §. 91. oſtenſum eſt, quadratum ſemiordinatæ *ba* in ellipſi ABCD (fig. 18. Tab. XIII.) duplum eſſe trapezii A*bz*N. Eodem quippe ratiocinio demonſtrabitur trapezium N*ya*A in hyperbola CAB æquale triangulo VA*a*, adeoque ſubduplum rectanguli ex A*a* in *a*V, cui quadratum ſemiordinatæ *ab* eſt æquale (c), quo in ellipſi ABCD demonſtratum fuit, trapezium A*bz*N æquare triangulum *b*A*e*. Itaque in hyperbola &c. quod erat oſtendendum. Fig. 8. T. XV.

THEO-

(a) §. 217.
(b) Lib. IX. §. 118.
(c) §. 217.

Digitized by Google

THEOREMA IV.

Si in hyperbola BAC, cujus axis tranſverſus ſit recta EA, parameter recta AG, ſubdirectrix recta MQ, & ſemiordinata ad axim recta ab, *fiat, ut recta* ea *ad ſemiordinatam* ab, *ita ipſa ſemiordinata* ab *ad rectam* aF *compoſitam ex abſciſſa* aA, *& ex ſegmento AF axis tranſverſi, recta* Fb *ducta ex puncto F ad extremum* b *ipſius ſemiordinatæ, erit tangens hyperbolam in ipſo puncto* b.

227. In recta F*b* ſumatur quodvis punctum *d* diverſum a puncto *b*, ex quo ad axim AP agatur recta ſemiordinata *dn*, quæ occurrat ſubdirectrici MQ in puncto *z*, & jungantur puncta F, *e* recta F*e*.

Demonſtratio.

Diverſa non eſt ab illa, qua §. 94. demonſtravimus, rectam LF tangere ellipſim ABCD in puncto F (fig. 1. Tab. XIV.)
Fig. 9. T. XV. ſi fuerit ∺ MN. NF. NL. Ut enim in ellipſi ABCD quadratum rectæ NF eſt duplum trianguli MLN, ita in hyperbola BAC quadratum rectæ *ab* erit duplum trianguli *e*F*a*; cumque quadratum rectæ *ab* ſit etiam duplum trapezii N*eaA* (a), triangulum *e*F*a* æquabit trapezium N*ea*A; & ideo ſublato communi trapezio *ex*A*a*, reliquum triangulum *x*FA erit æquale reliquo triangulo N*ex*; ac proinde ſicuti triangulum N*ex* eſt majus trapezio N*zyx*, ita eodem trapezio majus erit triangulum *x*FA, & ſi utrique adjiciatur trapezium *xyn*A, triangulum *y*F*n* majus erit trapezio N*zn*A. Quadratum autem ſemiordinatæ *nm* eſt duplum trapezii N*zn*A, & quadratum rectæ *nd* eſt duplum trianguli *y*F*n*; cum ſit æquale rectangulo ex *yn* in *n*F propter ana-

(a) §. 226.

Digitized by Google

analogiam $yn.nd = nd.nF$ (a), ex eo quod poſitum fuerit $ea.ab = ab.aF$. Ergo quadratum ſemiordinatæ *nm* erit ad trapezium N*zn*A, ut eſt quadratum rectæ *nd* ad triangulum *y*F*n*; atque adeo ſicuti trapezium N*zn*A deficit a triangulo *y*F*n*, ita quadratum rectæ *nm* deficiet a quadrato rectæ *nd*; & ideo recta *nm* erit minor recta *nd*, ſeu punctum *d* erit extra curvam hyperbolicam BAC, eademque ratione extra eandem curvam erunt reliqua omnia puncta rectæ F*b* a puncto *b* diverſa. Itaque recta F*b* tangit hyperbolam in puncto *b* (b). Si ergo in hyperbola &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Recta tangens hyperbolam, in uno tantum puncto ipſam tangit.

228. Id enim neceſſario ſequitur ex eo, quod punctum *b* dumtaxat ſit rectæ F*b*, & curvæ hyperbolicæ BAC commune.

COROLLARIUM II.

229. Si fiat P$a = ae$, & ducatur recta P*b*, hæc erit tangenti F*b* perpendicularis. Quippe, cum ſtante hypotheſi habeatur ∸ P*a*.*ab*.*a*F, angulus P*b*F erit rectus, ſive triangulum P*b*F erit rectangulum (c).

DEFINITIO XIII.

230. Quemadmodum in ellipſi, & in parabola, ita in hyperbola BAC recta P*b* dicitur *normalis* tangenti F*b*, recta *a*P *ſubnormalis*, & recta *a*F *ſubtangens*.

CO-

(a) §. 93.
(b) §. 19.
(c) Lib. IX. §. 74.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

231. In hyperbola BAC ſemiparameter NA eſt ad ſubnormalem *a*P, ut eſt ſemiaxis tranſverſus MA ad rectam M*a* compoſitam ex ſemiaxe MA, & ex abſciſſa A*a*. Cum enim rectæ N*a*, *ea* ſint parallelæ (a), erit NA.*ea*=MA.M*a* (b); adeoque NA.*a*P=MA.M*a*, propter æqualitatem ſcilicet duarum P*a*, *ea*.

COROLLARIUM IV.

232. Quemadmodum in ellipſi, ita in hyperbola BAC; ſi ſemiordinata *ba* uſque ad directricem EH directe producatur, ſubtangens F*a* erit ad abſciſſam A*a*, ut eſt recta *a*H ad rectam *ae*. Etenim, ex eo quod ſit ÷ *ea*.*ab*. *a*F, rectangulum *ea*×*a*F erit æquale quadrato mediæ *ab* (c). Eidem autem quadrato eſt æquale rectangulum H*a*×*a*A ex natura hyperbolæ (d). Ergo erit *ea*×*a*F=H*a*×*a*A (e); & ideo F*a*.*a*A=H*a*.*ae* (f).

COROLLARIUM V.

233. Hinc rectæ FH, A*e* erunt inter ſe parallelæ (g); & recta FH bifariam dividet *parametrum* GA, ſeu tranſibit per punctum N, in quo *parameter* ſecatur a ſubdirectrice MQ. Rectæ namque GN, NA ſunt æquales inter ſe, utpote æquales eidem H*e* (h); cum utrumque quadrilaterum GH*e*N, NH*e*A, ut in ellipſi demonſtravimus, ſit parallelogrammum.

COROLLARIUM VI.

234. Erit ergo, ut in ellipſi, ita in hyperbola ſemiaxis tranſverſus MA media proportionalis inter rectas M*a*, MF. Quan-

(a) §. 22.
(b) Lib. IX. §. 59.
(c) Ibidem §. 11.
(d) §. 217.
(e) Syn. Alg. §. 259.
(f) Lib. IX. §. 114.
(g) Ibidem §. 63.
(h) Lib. VI. §. 20.

Digitized by Google

Quandoquidem ob paralleliſmum rectarum NF, *e*A in triangulo *e*MA habetur M*e*. MN = MA. MF (a), & in triangulo *e*M*a* haud diſſimili ratione M*a*. MA = M*e*. MN. Ergo erit M*a*. MA = MA. MF (b).

COROLLARIUM VII.

235. Punctum F propterea, in quo axis tranſverſus EA hyperbolæ ſecatur a tangente, infra centrum M perpetuo reperitur. Enimvero, cum ſit M*a*. MA = MA. MF, ſicuti recta M*a* ſemper excedit rectam MA, ita recta MA major ſemper erit recta MF (c).

COROLLARIUM VIII.

236. Rurſus etiam in hyperbola erit E*a*. A*a* = EF. FA: Perſpicuum ſiquidem eſt, eſſe E*a*. EM = F*a*. FA; cum utraque hujuſmodi ratio ſit æqualis rationi, quam habet recta H*a* ad rectam H*e* propter paralleliſmum rectarum HE, *e*M in triangulo H*a*E, & rectarum HF, *e*A in triangulo H*a*F: Haud diſſimili quoque ratione habetur EM. EF = A*a*. F*a*, quod nempe utraque iſta ratio adæquet rationem rectæ HN ad rectam HF, ſtante paralleliſmo rectarum HE, NM in triangulo HFE, & rectarum H*a*, NA in triangulo HF*a*. Igitur conſtitui poſſunt duæ ſeries magnitudinum *perturbatam proportionem* habentium, nimirum

E*a* . EM . EF
A*a* . F*a* . FA

Ergo erit E*a*. EF = A*a*. FA (d); & ideo E*a*. A*a* = EF. FA (e).

COROLLARIUM IX.

237. Ac demum, ductis tangentibus verticalibus AT, ER occurrentibus laterali *b*R, erit R*b*. T*b* = RF. FT. Similia

(a) Lib. IX. §. 57.
(b) Lib. I. §. 76.
(c) Ibid. §. 45.
(d) Ibid. §. 181.
(e) Ibid. §. 125.

ſiquidem ſunt triangula RFE, FAT, utpote æquiangula; ratione paralleliſmi rectarum tangentium RE, AT. Igitur erit RF.FT = EF.FA (a). Producta autem recta AT in V, habetur Rb.Tb = Eb.bV (b), quod in triangulo RbE rectæ RE, TV ſint parallelæ. Eandem autem ob cauſam conſtat, in triangulo aEb eſſe Eb.bV = Ea.aA. Ergo erit Rb.Tb = Ea.aA (c). Demonſtravimus autem, eſſe RF.FT = EF.FA, ſicuti etiam Ea.aA = EF.FA (d). Ergo erit quoque Rb.Tb = RF.FT (e).

THEOREMA VI.

Si ex centro hyperbolarum oppoſitarum æqualium, & ſimilium ad extrema ex adverſo poſita æqualium ſemiordinatarum ad axim ducantur duæ rectæ lineæ, illæ æquales erunt inter ſe, & in directum poſitæ.

Sint duæ hyperbolæ oppoſitæ BAC, DEF ſibi mutuo ſimiles, & æquales, ex quarum centro O ad extrema ex adverſo poſita *d*, *e* ſemiordinatarum æqualium *ad*, *eb* ad axim *ab* ducantur rectæ O*d*, O*e*.

Fig. 10. T. XV.

I.

238. Dico primo, rectas O*d*, O*e* eſſe inter ſe æquales.

Demonſtratio.

Cum enim ſemiordinatæ *ad*, *be* poſitæ ſint æquales, correſpondentes earum abſciſſæ E*a*, A*b* erunt quoque inter ſe æquales (f). Æquales ſunt autem etiam duæ EO, AO (g). Ergo tota O*a* æquabit totam O*b* (h). Duo porro anguli

daO,

(a) Lib. IX. §. 67.
(b) Ibidem. §. 58.
(c) Lib. I. §. 76.
(d) §. 236.
(e) Lib. I. §. 76.
(f) §. 200.
(g) §. 198.
(h) Syn. Alg. §. 263.

Digitized by Google

*da*O, *eb*O ſunt æquales inter ſe, utpote recti (a). Igitur duo triangula *da*O, *be*O habent duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri, & angulos, qui æqualibus lateribus continentur, inter ſe æquales. Quamobrem æquales erunt inter ſe etiam eorum baſes O*d*, O*e* (b).

I I.

239. Dico 2. lineas O*d*, O*e* eſſe in directum poſitas, ſeu unam rectam lineam *ed* conſtituere.

Demonſtratio.

Enimvero, cum latera O*a*, O*b*, ſicuti etiam O*d*, O*e* triangulorum *a*O*d*, *e*O*b* ſint æqualia inter ſe, quemadmodum & eorum baſes *ad*, *eb*, æquales quoque erunt inter ſe verticales ipſorum anguli *a*O*d*. *e*O*b* (c). Sunt autem ad verticem oppoſiti. Ergo rectæ O*d*, O*e* ſunt in directum poſitæ, ſeu unam rectam *ed* conſtituunt (d). Si ergo ex centro &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Quævis recta linea tranſiens per centrum hyperbolarum oppoſitarum æqualium, & ſimilium, atque ad ipſas curvas utrinque terminata, biſariam in illo dividitur.

240. Ut ſi per centrum O hyperbolarum oppoſitarum BAC, DEF æqualium, & ſimilium ducatur recta *ed*, quæ utrinque curvis ipſis hyperbolicis occurrat, diviſa erit biſariam in ipſo centro O. Non enim poteſt duci ex puncto *e* per ipſum centrum recta linea, quæ occurrat curvæ hyperbolicæ DEF, quin illa tranſeat per punctum *d*. Quandoquidem, cum duæ rectæ *e*O, O*d* ſint in directum poſitæ, ſi

Q 2 ſecus

(a) §. 12.
(b) Lib. V. §. 71.
(c) Ibid. §. 82.
(d) Lib III. §. 55.

ſecus res contingeret, duæ rectæ lineæ commune ſegmentum haberent, quod repugnat (a).

COROLLARIUM II.

Recta conjungens extrema ex adverſo poſita æqualium ſemiordinatarum ad axim in hyperbolis oppoſitis æqualibus, & ſimilibus, tranſit per illarum centrum.

241. Recta nimirum conjungens extrema *d*, *e* æqualium ſemiordinatarum *ad*, *be* ad axim in hyperbolis oppoſitis, æqualibus, & ſimilibus DEF, BAC, tranſit per illarum centrum O. Etenim, ſi ſecus, cum duæ O*d*, O*e* unam rectam conſtituant, duæ rectæ ſpatium concluderent, ſecus ac fieri queat (b).

THEOREMA VII.

Si ex puncto E, in quo curva hyperbolica BAC ſecatur a recta HM ducta ex illius centro H, ducatur tangens EG occurrens axi tranſverſo KA in puncto G, & ex puncto verticali A agatur tangens AF occurrens ipſi rectæ HM in puncto F, triangula HAF, HGE erunt æqualia.

242. Ex puncto contactus E ducatur ad axim ſemiordinata ED.

Demonſtratio.

Quoniam rectæ AF, DE ſunt parallelæ (c), triangula
Fig. 2. T. XVI. DHE, AHF erunt ſimilia (d); ac proinde triangulum DHE erit ad triangulum AHF in ratione *duplicata* lateris HD ad latus ſibi homologum HA (e). Ratio autem rectæ HD ad

rectam

(a) Lib. III. §. 48.
(b) Lib. IV. §. 7.
(c) §. 22.
(d) Lib. IX. §. 65.
(e) Ibidem §. 168.

Digitized by Google

rectam HG eſt *duplicata* illius, quam habet recta HD ad rectam HA (a); cum ſit ∺ HD. HA. HG (b). Ergo triangulum DHE erit ad triangulum AHF, ut recta HD ad rectam HG (c). Conſtat autem, triangulum DHF eſſe itidem ad triangulum GEH ejuſdem altitudinis ED, ut recta HD ad rectam HG (d). Igitur eadem eſt ratio trianguli DHE ad utrumque triangulum AHF, GEH (e); & ideo duo iſta triangula AHF, GEH ſunt æqualia (f). Si ergo ex puncto &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

243. Cum duo triangula AHF, GEH ſint æqualia, ſi utrique dematur commune trapezium HG*b*F, reliquum triangulum G*b*A reliquo triangulo F*b*E erit æquale (g).

COROLLARIUM II.

244. Triangulum DGE adæquat trapezium FADE. Quandoquidem, ſi triangulis æqualibus G*b*A, F*b*E addatur trapezium A*b*ED, triangulum DGE æquabit trapezium FADE (h).

COROLLARIUM III.

245. Ducta ex vertice A recta AM parallela tangenti EG, atque ſecanti HM occurrens in puncto M, triangulum MFA erit æquale trapezio EGAM. Hæc enim emergunt ex additione trapezii ME*b*A triangulis æqualibus G*b*A, F*b*E, ut eſt manifeſtum.

LEM-

(a) Lib. I. §. 177.
(b) §. 234.
(c) Lib. I. §. 78.
(d) Lib. IX. §. 95.
(e) Lib. I. §. 76.
(f) Ibid. §. 113.
(g) Syn. Alg. §. 266.
(h) Ibidem §. 265.

Digitized by Google

L E M M A I.

Si recta linea ſecetur bifariam, eique recta quædam adiiciatur, rectangulum contentum ſub tota, & ſub parte adjecta, una cum quadrato partis dimidiæ eſt æquale quadrato rectæ compoſitæ ex parte dimidia, & ex parte adjecta.

246. Recta AB bifariam ſecetur in C, eique recta quædam adiiciatur DB. Dico, rectangulum AE compoſitum ex tota AD, & ex adjecta BD, una cum quadrato CF partis dimidiæ AC, eſſe æquale quadrato CG rectæ CD compoſitæ ex parte dimidia CB, & ex adjecta BD.

Fig. 4. T. XVI. Euclid. l. 2. p. 6

Demonſtratio I.

Ponatur $AC = CB = a$, $BD = b$, adeoque $AB = 2a$, $AD = 2a + b$, & $CD = a + b$. Igitur erit $AD \times BD = 2ab + bb$, $\overline{AC}^2 = aa$; ac proinde $AD \times BD + \overline{AC}^2 = 2ab + bb + aa = aa + 2ab + bb$. Eſt autem etiam $\overline{CD}^2 = aa + 2ab + bb$. Ergo erit $AD \times BD + \overline{AC}^2 = \overline{CD}^2$.

Demonſtratio II.

Deſcripto circa rectam BA ſemicirculo BHA, atque ex puncto D ducta tangente DH, nec non ex centro C ad punctum contactus H recta CH, manifeſtum eſt, rectangulum AE eſſe æquale quadrato tangentis DH (a); & quoniam quadratum CF rectæ CB eſt æquale quadrato rectæ CH (b), rectangulum AE una cum quadrato CF erit æquale quadratis rectarum DH, HC ſimul ſumtis (c). Hiſce autem duobus

(a) Lib. IX. §. 147.
(b) Lib. I. §. 187.
(c) Syn. Alg §. 265.

Digitized by Google

bus quadratis eſt æquale etiam quadratum CG rectæ DC (a); cum angulus CHD in triangulo CHD ſit rectus (b). Ergo rectangulum AE una cum quadrato CF erit æquale quadrato CG (c). Itaque ſi recta linea &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VIII.

In hyperbola quævis recta linea ducta ex illius centro dividit biſariam omnes rectas parallelas tangenti ductæ per punctum, in quo curva hyperbolica ab illa recta ſecatur.

247. In hyperbola BAC, cujus axis tranſverſus ſit recta E*a*, ducatur ex illius centro D recta quævis DO ſecans ipſam curvam hyperbolicam BAC in puncto A, ex quo ducatur tangens A*d* occurrens lateri tranſverſo in puncto *d*. Dico, rectam DO biſariam ſecare in hyperbola omnes rectas lineas parallelas tangenti A*d*. Fig. 4. T. XVI. Apoll. l. 1. p. 47

Demonſtratio.

I.

Spectetur primo recta *e*H. Hac itaque directe producta in *b*, ducatur tangens verticalis *a*F, nec non per punctum *e* ordinata T*e* ad axim, & ex puncto A ſemiordinata AK, ſicuti etiam ex puncto H ſemiordinata HL. Quoniam igitur rectæ *a*F, KA, L*r* in triangulo LD*r* ſunt parallelæ, triangula D*a*F, DKA, DL*r* erunt ſimilia (d); ac proinde triangula DL*r*, DKA, D*a*F erunt inter ſe, ut quadrata ſuorum laterum homologorum DL, DK, D*a* (e), videlicet triangulum DL*r* erit ad triangulum D*a*F, ut quadratum lateris DL ad quadratum lateris D*a*, & triangulum DKA ad triangulum D*a*F, ut quadratum lateris DK ad quadratum

(a) Lib. VI. §. 37.
(b) Lib. VII. §. 50.
(c) Syn. Alg. §. 262.
(d) Lib. IX. §. 65.
(e) Ibidem §. 166.

Digitized by Google

tum lateris D*a*. Igitur etiam exceſſus trianguli DL*r* ſupra triangulum D*aF*, nempe trapezium *FaLr*, erit ad exceſſum trianguli DKA ſupra idem triangulum D*aF*, ſcilicet ad trapezium F*a*KA, ut eſt exceſſus quadrati rectæ DL ſupra quadratum rectæ D*a* ad exceſſum quadrati rectæ DK ſupra quadratum ejuſdem rectæ D*a* (a), nimirum ut rectangulum ex EL in L*a* ad rectangulum ex EK in K*a* (b). Ut autem rectangulum ex EL in L*a* ad rectangulum ex EK in K*a*, ita eſt quadratum ſemiordinatæ LH ad quadratum ſemiordinatæ KA (c); & ut quadratum rectæ LH ad quadratum rectæ KA, ita eſt triangulum LH*b* ad triangulum KA*d* (d); cum hujuſmodi triangula, utpote æquiangula, ſint ſimilia (e). Ergo trapezium F*a*L*r* erit ad trapezium F*a*KA, ut triangulum LH*b* ad triangulum KA*d* (f). Trapezium autem F*a*KA adæquat triangulum KA*d* (g). Igitur etiam trapezium F*a*L*r* æquabit triangulum LH*b* (h). Eodem modo demonſtrabitur, triangulum *xeb*, & trapezium *ax*GF eſſe æqualia. Quamobrem, ſi triangulo LH*b* dematur triangulum *xeb*, & trapezio F*a*LH trapezium *ax*GF, trapezium reſiduum H*ex*L erit æquale reſiduo trapezio L*r*G*x* (i); ac proinde, ſi hiſce auferatur commune ſpatium L*rbex*, reliquum triangulum *eb*G erit æquale reliquo triangulo *rh*H (k). Duo autem hujuſmodi triangula ſunt ſimilia (l); cum ſint æquiangula, prout rem attente conſideranti planum fiet. Igitur duo ipſorum homologa latera *eb*, *b*H ſunt æqualia (m); & ideo recta *e*H a recta DO bifariam dividitur.

II.

Sit modo recta *a*N parallela tangenti A*d*. Perſpicuum eſt, triangulum MN*a* æquare trapezium F*a*MS. Quandoquidem eodem ratiocinio, quo *numero præcedenti* demonſtravimus,

(a) §. 109.
(b) §. 246.
(c) §. 201.
(d) Lib. IX. §. 166.
(e) Ibid. §. 66.
(f) Lib. I. §. 76.
(g) §. 244.
(h) Lib. I. §. 128.
(i) Syn. Alg. §. 266.
(k) Ibidem.
(l) Lib. IX. §. 66.
(m) §. 110.

Digitized by Google

mus, triangulum LHb eſſe æquale trapezio FaLr, nunc quoque oſtendemus, triangulum MNa æquare trapezium FaMS. Igitur, ſi triangulo MNa, & trapezio FaMS auferatur commune ſpatium SmaM, reliquum triangulum SmN reliquo triangulo amF erit æquale (a); cumque duo iſta triangula, utpote æquiangula, ſint ſimilia, æqualia erunt latera ipſorum homologa Nm, ma (b); & ideo etiam recta Na biſariam diviſa erit a recta DO.

III.

Tangenti demum Ad ſit parallela recta CT, quæ hyperbolæ axim ſecet in puncto y. Superiori ratiocinio adhibito, palam fiet, triangulum CyP eſſe æquale trapezio OFaP. Ducta vero ex puncto T ordinata Te, eaque producta in G, ſumatur in axe ſegmentum xb æquale ſegmento xy, & jungantur puncta e, b recta eb. Cum igitur anguli Txy, bxe ſint æquales (c), ſicuti etiam rectæ Tx, xe (d), & bx, xy duo triangula Txy; bxe erunt æqualia (e); & cum æquales itidem ſint anguli alterni xeb, xTy (f), rectæ be, Ty erunt parallelæ (g), & ideo ſicuti recta Ty, ita recta be erit parallela tangenti Ad (h); ac proinde triangulum bxe æquabit trapezium axGF, ut ex ſuperius traditis manifeſtum efficitur; & ideo etiam triangulum Tyx erit trapezio axGF æquale. Quamobrem trapezium POGx una cum triangulo yxT æquabit trapezium POFa; atque adeo etiam triangulum PCy (i). Hinc, demto communi trapezio OnyP, reliquum triangulum OnC erit æquale reliquo triangulo TnG (k); cumque duo iſta triangula ſint æquiangula, adeoque ſimilia, habebunt latera homologa Tn, nC inter ſe æqualia (l). Igitur etiam recta TC biſariam dividitur a recta DO. Quamobrem in hyperbola &c. quod erat oſtendendum.

(a) Syn. Alg. §. 266.
(b) §. 110.
(c) Lib. III. §. 51.
(d) §. 12.
(e) Lib. V. §. 74.
(f) Ibidem §. 82.
(g) Lib. IV. §. 12.
(h) Ibidem §. 18.
(i) Synop. Alg. §. 261.
(k) Ibidem §. 266.
(l) §. 119.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Omnis recta in hyperbola tranſiens per illius centrum diverſa ab axe eſt diameter ſecundaria.

248. Dividit enim bifariam omnes rectas tangenti parallelas.

COROLLARIUM II.

Quævis recta in hyperbola ducta ex illius centro dividit bifariam ſegmentum quodcunque hyperbolicum determinatum a recta ad illam ordinata.

Fig. 7. T. XVI. 249. Sic recta GM in hyperbola BAC ducta ex illius centro G dividit bifariam ſegmentum hyperbolicum *dand* determinatum a recta *dn* ipſi GM ordinatim applicata. Quandoquidem ductis tot ordinatis, quot ſunt puncta in abſciſſa A*x*, cum omnes bifariam a recta *a*M dividantur, tot erunt elementa ſpatii hyperbolici *dax*, quot ſunt elementa ſpatii hyperbolici *nax*. Sunt autem elementa unius æqualia elementis alterius, ſi in eadem a vertice diſtantia utrobique ſumantur. Ergo ſpatia *dax*, *nax* ſunt æqualia (a).

DEFINITIO XIV.

Fig. 4. T. XVI. 250. Si recta AD ultra centrum D producta, fiat DQ=DA, recta AQ dicitur *diameter ſecundaria tranſverſa* hyperbolæ, quemadmodum recta E*a* *tranſverſus* ejuſdem *axis* nuncupatur.

CO-

(a) Lib. IX. §. 53.

COROLLARIUM III.

In hyperbola omnis diameter ſecundaria tranſverſa eſt major axe tranſverſo.

251. Nimirum diameter quęcunque ſecundaria tranſverſa *de* hyperbolæ BAC eſt major axe tranſverſo EA. Etenim ductis ad axim ſemiordinatis *da*, *eb*, cum in triangulo *da*O angulus *da*O ſit rectus (a), atque propterea major angulo *ad*O (b), recta O*d* erit major recta O*a* (c). Eadem ratione recta *e*O erit major recta O*b*. Igitur tota *de* excedet rectam *ab*; ac proinde etiam rectam EA. Fig. 10. T. XV.

THEOREMA IX.

Quadrata ſemiordinatarum ad quamlibet ſecundariam diametrum hyperbolæ ſunt directe inter ſe, ut rectangula contenta ſub correſpondentibus abſciſſis, & ſub recta compoſita ex diametro tranſverſa, & ex abſciſſa reſpective.

252. Recta DO ſit diameter ſecundaria hyperbolæ BAC, ejuſque axis recta EP, & centrum D. Rectæ vero *eh*, *am*, T*n* ſint ſemiordinatæ ad ipſam diametrum. Dico, quadratum ſemiordinatæ *eh* eſſe ad quadratum ſemiordinatæ *am*, ut rectangulum ex abſciſſa A*h*, & ex recta Q*h* compoſita ex diametro tranſverſa QA, & ex abſciſſa A*h*, ad rectangulum contentum ſub abſciſſa A*m*, & ſub recta Q*m*. Similiter quadratum ſemiordinatæ *am* eſſe ad quadratum ſemiordinatæ T*n*, ut eſt rectangulum ex A*m* in Q*m* ad rectangulum ex A*n* in Q*n*. Fig. 4. T. XVI.

R 2 *Demon-*

(a) §. 12.
(b) Lib. V. §. 44.
(c) Ibid. §. 53.

Demonſtratio.

Ductis tangentibus *a*F, A*d*, nec non per punctum *e* recta *x*G parallela tangenti *a*F; in directum quoque producta ſemiordinata *he* in *b*, cum triangulum *xbe* ſit æquale trapezio *ax*GF, ut §. 247. *num. I.* demonſtravimus, ſi utrique auferatur commune trapezium *axez*, reliquum triangulum *azb* æquabit reſiduum trapezium *ze*GF (a); ac proinde etiam triangulum *aod* duobus trapeziis *bzod*, *ze*GF ſimul ſumtis erit æquale (b). Conſtat autem, triangulum *o*AF æquare triangulum *aod* (c). Ergo triangulum *o*AF erit itidem æquale duobus trapezii *bzod*, *ze*GF (d); demtoque trapezio GF*ou*, triangulum G*u*A erit æquale trapezio *dbeu*; quibus ſi adjiciatur trapezium *ueh*A, triangulum G*eh* æquabit trapezium *dbh*A (e). Perſpicuum porro eſt, triangulum F*am* eſſe æquale trapezio *dam*A (f). Ergo triangulum G*eh* erit ad triangulum F*am*, ut eſt trapezium *dbh*A ad trapezium *dam*A. Ut autem triangulum G*eh* ad triangulum F*am*, ita eſt quadratum rectæ *eh* ad quadratum rectæ *am* (g); cum duo illa triangula, utpote æquiangula, ſint ſimilia (h), & rectæ *eh*, *am* ſint latera ipſorum homologa (i). Ergo quadratum rectæ *eh* erit ad quadratum rectæ *am*, ut eſt trapezium *dbh*A ad trapezium *dam*A (k), nempe ut exceſſus trianguli *h*D*b* ſupra triangulum AD*d* ad exceſſum trianguli *m*D*a* ſupra idem triangulum AD*d*. Hujuſmodi porro exceſſus ſunt directe inter ſe, ut exceſſus quadrati lateris D*h* ſupra quadratum lateris DA ad exceſſum quadrati lateris D*m* ſupra quadratum ejuſdem lateris DA (l); propterea quod cum ob paralleliſmum rectarum *d*A, *bh*, *am* triangula *d*DA, *b*D*h*, *a*D*m* ſint ſimilia (m); adeoque ſint ut quadrata ſuo-

(a) *Synop.Alg.* §. 266.
(b) Ibid. §. 265.
(c) §. 242.
(d) *Synop.Alg.* §. 261.
(e) Ibidem §. 265.
(f) §. 245.
(g) Lib. IX. §. 166.
(h) Ibid. §. 66.
(i) Ibid. §. 67.
(k) Lib I. § 76.
(l) §. 109.
(m) Lib. IX. §. 65.

ſuorum laterum homologorum DA, D*b*, D*m* (a). Igitur etiam quadratum lateris *eb* erit ad quadratum lateris *am*, ut eſt exceſſus quadrati lateris D*b* ſupra quadratum lateris DA ad exceſſum quadrati lateris D*m* ſupra quadratum lateris DA. Conſtat autem, exceſſum quadrati lateris D*b* ſupra quadratum lateris DA eſſe rectangulum ex A*b* in Q*b*, & exceſſum quadrati lateris D*m* ſupra quadratum lateris AD eſſe rectangulum ex A*m* in Q*m* (b). Ergo quadratum ſemiordinatæ *eb* eſt ad quadratum ſemiordinatæ *am*, ut rectangulum ex A*b* in Q*b* ad rectangulum ex A*m* in Q*m*.

Ducta modo ex puncto T ordinata T*e*, eaque producta in G, atque per punctum *e* ducta *hb* parallela tangenti A*d*, manifeſtum eſt ex ſuperius traditis, triangulum *xbe* æquare triangulum *yx*T. Hinc trapezium *nhby* erit æquale trapezio *nhe*T (c); & ſi utrique adjiciatur triangulum G*eh*, triangulum GT*n* æquabit trapezium *nhby* una cum triangulo G*eh* (d). Trapezium autem *bh*A*d* eſt æquale triangulo G*eh*, ſicuti ſupra oſtenſum eſt, ut proinde trapezium A*dyn* ſit æquale trapezio *nhby* una cum triangulo G*eh* (e). Ergo triangulum GT*n* erit æquale trapezio A*dyn* (f); eritque propterea triangulum GT*n* ad trapezium A*dyn*, ut eſt triangulum F*am* ad trapezium *dam*A, & *alternando*, triangulum GT*n* erit ad triangulum F*am*, ut trapezium A*dyn* ad trapezium *dam*A (g), nempe ut exceſſus trianguli *n*D*y* ſupra triangulum AD*d* ad exceſſum trianguli *m*D*a* ſupra idem triangulum AD*d*, & ideo ut exceſſus pariter quadrati lateris D*n* ſupra quadratum lateris DA ad exceſſum quadrati lateris D*m* ſupra quadratum ejuſdem lateris DA (h), videlicet ut rectangulum ex A*n* in Q*n* ad rectangulum ex A*m* in Q*m* (i). Ut autem triangulum GT*n* ad triangulum ſibi ſimile F*am*, ita quadratum lateris T*n* ad quadratum lateris ſibi homologi *am* (*k*). Igitur quadratum rectæ T*n*

erit

(a) Lib. IX. §. 166.
(b) §. 246.
(c) Synop. Alg. §. 265.
(d) Ibidem.
(e) Ibidem.
(f) Ibid. §. 261.
(g) Lib. I §. 125.
(h) §. 109.
(i) §. 246.
(k) Lib. IX. § 166.

Digitized by Google

erit ad quadratum rectæ *am* itidem, ut rectangulum ex A*n* in Q*n* ad rectangulum ex A*m* in Q*m* (a). Quadrata ergo ſemiordinatarum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

In hyperbola quadrata ſemiordinatarum ad quamlibet diametrum ſecundariam habent omnia eandem rationem ad ſuum reſpective rectangulum contentum ſub abſciſſa, & ſub recta compoſita ex ipſa abſciſſa, & ex diametro tranſverſa.

253. Perſpicuum fiet eodem ratiocinio, quo §. 201. idipſum oſtenſum eſt de quadratis ſemiordinatarum ad axim.

SCHOLION.

254. Hinc *parameter tranſverſæ diametri in hyperbola eſt recta linea ducta ex illius vertice ordinatis parallela, adeoque hyperbolam tangens, cujus ratio ad diametrum ipſam tranſverſam eadem eſt cum illa, quam habet quadratum cujuslibet ſemiordinatæ ad rectangulum contentum ſub correſpondente abſciſſa, & ſub recta compoſita ex eadem abſciſſa, & ex ipſa diametro tranſverſa*, cujuſmodi itidem eſt parameter axis tranſverſi.

DEFINITIO XV.

255. Quemadmodum in ellipſi diameter ſecundaria alteri conjugata eſt recta tranſiens per centrum, media proportionalis inter illam diametrum, ejuſque parametrum (b), ita *in hyperbola illa recta linea tranſiens per centrum, in quo bifariam dividatur, dicitur diameter tranſverſæ diametri conjugata, quæ eſt media proportionalis inter diametrum ipſam tranſverſam, & illius parametrum.*

CO-

(a) Lib. I. §. 78   (b) §. 123.

COROLLARIUM I.

256. Hinc *quadratum diametri conjugatæ in hyperbola eſt æquale rectangulo, quod ſub diametro tranſverſa, cui illa ponitur conjugata, & ſub ejuſdem parametro comprehenditur.*

COROLLARIUM II.

257. *Quadratum vero ejuſdem ſemidiametri conjugatæ eſt quarta pars rectanguli contenti ſub diametro tranſverſa, cui illa eſt conjugata, & ſub illius parametro.*

THEOREMA X.

In hyperbola BAC, cujus axis tranſverſus ſit recta EA, ductis tangentibus verticalibus ER, AT occurrentibus tangenti laterali Rb in punctis R, T, rectangulum contentum ſub tangentibus ER, AT eſt æquale quadranti figuræ tranſverſi axis EA.

258. Ex puncto contactus *b* ducatur recta *b*H ordinatim axi AD applicata, rectæque directrici EH occurrens in puncto H, ex quo ad punctum F, in quo axis tranſverſus EA a tangente laterali R*b* dividitur, ducatur recta HF, & ex puncto contactus *b* ad extremum E recta *b*E, necnon ex eodem puncto per verticem A recta *b*S, quæ occurrat tangenti ER directe productæ in puncto S. Recta quoque AT occurrat rectæ *b*E in V; ſitque AG parameter ipſius hyperbolæ, directrix recta EH, & ſubdirectrix recta M*e*. Fig. 9. T. XV. Apoll. l. 3. p. 42

Demonſtratio.

Quoniam in triangulo HE*b* rectæ H*b*, GV ſunt parallelæ (a), erit H*a*. *ab*=GA.AV (b). Eſt autem in triangulo quo-

(a) §. 22. (b) §. 92.

quoque HF*b* haud diſſimili ratione H*a*. *ab*=NA.AT. Ergo erit GA.AV=NA.AT (a), & *alternando*, GA.NA =AV.AT(b). Conſtat autem, eſſe GA=2NA (c). Igitur erit etiam AV=2AT, ſeu AT=TV, & ideo AV=2TV. Rurſus quoniam in triangulo S*b*E propter paralleliſmum rectarum SE, AV, tam recta SE eſt ad rectam AV, quam recta RE ad rectam TV, ut eſt recta E*b* ad rectam V*b* (d), adeoque ſit SE.AV=RE.TV, erit SE.RE=AV.TV(e). Eſt autem AV=2TV. Ergo erit etiam SE=2RE, ſeu SR =RE. Hinc rectangulum ex recta RE in rectam AT æquabit quadrantem rectanguli ex tota SE in totam AV (f). Rectangulum porro ex SE in AV eſt æquale rectangulo figuræ axis tranſverſi EA. Quandoquidem, cum triangula SAE, A*ab* ſint inter ſe æquiangula, adeoque ſimilia (g), erit SE.EA=*ab*.A*a* (h). Eſt autem H*a*.*ab*=*ab*.A*a* (i). Ergo erit SE.EA=H*a*.*ab* (k). Cumque ſit etiam GA.AV =H*a*.*ab*, erit quoque SE.EA=GA.AV (l), ac propterea SE×AV=EA×GA (m). Igitur rectangulum RE×AT ſicuti eſt quarta pars rectanguli SE×AV, ita erit quarta pars rectanguli EA×GA (n); & ideo in hyperbola &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) Lib. I. §. 76.
(b) Ibid. §. 125.
(c) §. 233.
(d) Lib. IX. §. 59.
(e) Lib. I. §. 125.
(f) Lib. IX. §. 170.
(g) Ibid. §. 66.
(h) Ibidem §. 1.
(i) §. 225.
(k) Lib. I. §. 76.
(l) Ibid. §. 78.
(m) Lib. IX §. 107.
(n) Lib. I. §. 112.

Digitized by Google

THEOREMA XI.

Si in axibus AX, EL hyperbolarum oppoſitarum BAC, DEF, quarum axis tranſverſus ſit recta EA, ſumantur duo puncta b, a, *quæ ita diſtent a ſuo vertice A, E, ut tam rectangulum ex A*b *in E*b, *quam rectangulum ex* a*E in* a*A, ſit æquale quadranti figuræ lateris tranſverſi EA, rectæ* aC, bC *ductæ ex illis punctis* a, b *ad quodvis punctum C curvæ hyperbolicæ BAC, conſtituent cum recta tangente KC per illud punctum trajecta, æquales angulos KC*b, *KC*a.

259. Ex utroque vertice A, E ducantur tangentes verticales A*d*, EK, quæ tangenti laterali KC occurrant in punctis *d*, K. Ex datis vero punctis *b*, *a* ad puncta K, *d* ipſarum tangentium verticalium agantur rectæ *b*K, *bd*, *a*K, *ad*. Fig. 1. T. XVI. Apoll. l. 3. p. 45

Demonſtratio.

Cum rectangulum ex *a*E in A*a* ponatur æquale quadranti figuræ axis tranſverſi EA, quemadmodum eidem quadranti eſt æquale rectangulum ex EK in A*d* (a), duo iſta rectangula *a*E × A*a*, EK × A*d* erunt æqualia (b). Igitur erit *a*E . EK = A*d* . A*a* (c). Duo autem anguli KE*a*, *a*A*d* ſunt æquales inter ſe, utpote recti. Ergo duo triangula KE*a*, *a*A*d* erunt ſimilia (d); & ideo æquales erunt ipſorum anguli *a*KE, A*ad*, qui proportionalibus lateribus continentur (e). Conſtat autem, duos angulos K*a*E, EK*a* in triangulo rectangulo KE*a* æquare unum rectum (f). Ergo etiam duo anguli K*a*E, A*ad* ſimul ſumti unum rectum angulum æquabunt, ſeu angulus K*ad* erit rectus. Eodem modo oſtendam, angulum quoque K*bd* eſſe rectum. Si ergo circa rectam K*d*, cui

(a) §. 258. (b) Syn. Alg. §. 259. (c) Lib. IX §. 114. (d) Ibid. §. 69. (e) Ibid. §. 1. (f) Lib. V. §. 17.

Digitized by Google

duo hujuſmodi recti anguli incumbunt, deſcribatur circulus *b*R*a*K, is neceſſario tranſibit per quatuor puncta K, *a*, *d*, *b* (a); & ideo anguli *bad*, *b*K*d*, utpote in eadem circuli portione poſiti, erunt inter ſe æquales (b).

Ducatur modo per punctum *d* recta *e*N parallela rectæ K*a*: Quoniam igitur anguli parallelarum alterni K*ae*, *aed*, nec non *a*K*d*, K*de*, ſunt æquales (c), ſicuti etiam anguli ad verticem oppoſiti KP*a*, *e*P*d* (d), duo triangula KP*a*, *e*P*d* erunt ſimilia (e); atque propterea erit K*a*. *ed* = KP. P*d* (f). In triangulo autem KC*a* ob paralleliſmum rectarum K*a*, *d*N; habetur K*a*. *d*N = KC. *d*C (g); & aliunde conſtat, eſſe KP. P*d* = KC. *d*C (h). Ergo erit K*a*. *ed* = K*a*. *d*N (i); & ideo *ed* = *d*N (k). Perſpicuum porro eſt, angulos *ade*, *ad*N eſſe inter ſe æquales; cum angulus *ad*N adæquet angulum K*ad* (l), quem demonſtravimus rectum, & duo anguli *ade*, *ad*N valeant duos rectos (m); adeoque uterque angulus *ade*, *ad*N ſit rectus. Ergo duo triangula *ead*, *ad*N ita ſunt æqualia, ut angulus *da*N angulum *ead* adæquet (n). Oſtenſum eſt autem, angulum *ead* eſſe æqualem angulo *b*K*d*. Igitur etiam angulus *da*N eidem angulo *b*K*d* erit æqualis (o). Quamobrem in directum productis rectis K*b*, *ad*, donec ſimul concurrant in puncto Q, ſimulque junctis punctis Q, C recta QC, ſpectari optime poteſt recta QC, veluti chorda circuli QCTK, cui æquales anguli QKC, Q*a*C ad illius peripheriam poſiti inſiſtant, videlicet, cum æquales anguli in eadem ſint portione circuli (p), circulus QCTK deſcribi poteſt circa rectam KQ, veluti diametrum, qui ſimul tranſibit per puncta K, *a*, C, Q. Igitur angulus KCQ, ut pote in ſemicirculo KTQ conſiſtens, erit rectus (q); & ideo recta QC ad perpendiculum incumbet rectæ tangenti KC; & quoniam anguli KQ*a*, KC*a* in eadem circuli portione, ut patet, reperiuntur, erunt inter ſe æquales (r).

Præ-

(a) Lib. VI. §. 78.
(b) Ibid. §. 73.
(c) Lib. IV. §. 15.
(d) Lib. III. §. 51.
(e) Lib. IX. §. 66.
(f) Ibid. §. 67.
(g) Ibid. §. 59.
(h) §. 237.
(i) Lib. I. §. 76.
(k) Ibid. §. 113.
(l) Lib. IV. §. 15.
(m) Lib. III. §. 40.
(n) Lib. V. §. 94.
(o) Syn. Alg. §. 262.
(p) Lib. VII. §. 73.
(q) Ibid. §. 75.
(r) Ibid. §. 73.

Digitized by Google

Præterea, quoniam duo anguli K*bd*, *db*Q valent duos rectos (a), & angulus K*bd* jam oſtenſus eſt rectus, rectus erit etiam angulus *db*Q. Rectus autem itidem eſt angulus QC*d*, qui eidem inſiſtit rectæ *d*Q. Ergo circulus *b*MQC deſcriptus circa rectam *d*Q tranſibit per puncta *d*, *b*, Q, C (b); ac proinde anguli *b*Q*d*, *b*C*d* in eadem circuli portione conſiſtentes, erunt inter ſe æquales (c). Demonſtravimus autem, æquales eſſe inter ſe etiam angulos KQ*a*, KC*a*, ſive *b*Q*d*, *d*CN. Ergo duo anguli *b*C*d*, *d*CN, ſive KC*b*, KC*a* erunt inter ſe æquales (d). Itaque ſi in axibus &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

260. Poſito ergo lumine in puncto *a*, omnes ipſius radii incidentes in curvam hyperbolicam BAC ita ex illa reflecti debent, ut, ſi curvam ipſam trajicere poſſent, in puncto *b* omnes ſimul colligerentur. Non enim reflexio luminis ex curva hyperbolica BAC ea conſtanti naturæ lege poteſt perfici, ut angulus reflexionis angulum incidentiæ adæquet, quin omnes radii, qui ex puncto *a* in illam curvam cadunt, per punctum *b* poſt reflexionem tranſeant, facta nimirum hypotheſi, ut radii curvam ipſam hyperbolicam trajiciant. Duo idcirco puncta *a*, *b* *foci*, ſive *umbilici* hyperbolæ BAC communiter dicuntur (e).

SCHOLION.

261. Quoniam vero radii luminis, qui ex puncto *a* incidunt in curvam ſuperficiem hyperbolici ſpeculi BAC, non uniuntur reipſa in puncto *b*, ſed extra illam diſperguntur, ut patet de radio *a*C, qui ita ex illa curva reſilit, ut ſecundum rectam CZ vi reflexionis propagetur, poſita nimirum æqualitate angulorum incidentiæ *a*CK, & reflexionis ZCV, ideo puncta *a*, *b* *foci* hyperbolæ non quidem *reales*, ſed *ima-*

(a) Lib. III. §. 40.
(b) Lib. VII. §. 78.
(c) Ibid. §. 73.
(d) Syn. Alg. §. 259.
(e) §. 20.

ginarii vocantur, quatenus nempe punctum *a* objecti radiantis in ſpeculum hyperbolicum BAC, in altero puncto *b* ſui imaginem exhibet, perinde omnino ac ſi in puncto *b* reipſa conſiſteret, cujus ratio eſt; quia ſi radius reflexus CZ directe intra ſpeculum mente producatur, puncto *b* occurrit, propter æqualitatem ſcilicet angulorum *a*CK, KC*b* ſuperius oſtenſa, adeoque etiam angulorum KC*b*, ZCV, ex quo fit, ut lineæ ZC, C*b* ſint in directum poſitæ (a), ac proinde radius reflexus CZ afficiat retinam oculi eodem plane modo, quo ipſam afficeret, ſi ex puncto *b* reipſa erumperet, nempe ſi objectum radians in puncto *b* reipſa haberetur, vimque ſuam ex illo emitteret.

COROLLARIUM II.

262. Itaque *foci*, ſive *umbilici* hyperbolæ ſunt *duo puncta ſumta in axe, quæ ita hinc inde diſtant a ſuo vertice, ut rectangulum contentum ſub correſpondente abſciſſa, & ſub recta compoſita ex ipſa abſciſſa, & ex axe tranſverſo, ſit æquale quadranti figuræ ipſius axis.*

COROLLARIUM III.

Uterque focus hyperbolæ ita diſtat a ſuo vertice, ut rectangulum contentum ſub correſpondente abſciſſa, & ſub recta compoſita ex ipſa abſciſſa, & ex axe tranſverſo ſit æquale quadrato ſemiaxis conjugati.

263. Demonſtravimus enim, quadratum ſemiaxis conjugati eſſe æquale quadranti figuræ axis tranſverſi (b).

THEO-

(a) Lib. III. §. 55.
(b) §. 257.

THEOREMA XII.

Uterque focus hyperbolæ æqualiter diſtat a ſuo vertice.

264. Puncta *a*, *b* ſint foci hyperbolæ BAC, cujus axis tranſverſus ſit recta EA, duoque puncta E, A ejuſdem vertices. Dico, diſtantiam foci *b* a vertice A æquare diſtantiam foci *a* a vertice E, ſeu eſſe E*a* = A*b*. Fig. 1. T. XVI.

Demonſtratio.

Cum enim rectangulum E*b*×A*b* adæquet rectangulum A*a*×E*a* (a), quatenus utrumque eſt æquale quadrato ſemiaxis conjugati (b), erit E*b*. A*a* = E*a*. A*b* (c); ac proinde E*b*. E*a* = A*a*. A*b* (d), nec non E*b* + E*a*. E*a* = A*a* + A*b*.A*b* (f). Ergo erit etiam E*a* = A*b* (g). Itaque uterque focus &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

Foci hyperbolæ æqualiter diſtant ab illius centro.

265. Ut ſi punctum O fuerit centrum hyperbolæ BAC; ejuſque foci puncta *b*, *a*, erit O*b* = O*a*. Quandoquidem cum ſit OE = OA (h), & A*b* = E*a* (i), erit etiam OE + E*a* = OA + A*b*, ſive O*a* = O*b* (k).

THEO-

(a) Syn. Alg. §. 259.
(b) §. 263.
(c) Lib. IX. §. 114.
(d) Lib. I. §. 125.
(e) Ibid. §. 132.
(f) Synop. Alg. §. 256.
(g) Lib. I. §. 128.
(h) §. 198.
(i) §. 264.
(k) Syn. Alg. §. 265.

Digitized by Google

THEOREMA XIII.

In hyperbola recta linea ducta ex uno puncto extremo axis tranſverſi ad extremum axis conjugati adæquat diſtantiam foci a centro.

Fig. 10. T. XV. 266. Recta EA ſit axis tranſverſus, GH axis conjugatus, & puncta *b*, *a* foci hyperbolæ BAC. Dico, rectam AH, qua extrema puncta A, H axium EA, GH ſimul junguntur, æquare diſtantiam foci *b* a centro O, videlicet eſſe AH = *b*O.

Demonſtratio.

Quoniam rectangulum ex E*b* in A*b* eſt æquale quadrato ſemiaxis conjugati OH (a), ſi utrique adjiciatur quadratum ſemiaxis tranſverſi OA, rectangulum ex E*b* in A*b* una cum quadrato ſemiaxis OA erit æquale quadratis ſemiaxium OH, OA (b). Rectangulum autem ex E*b* in A*b* adæquat rectangulum ex *a*A in A*b*; cum ſit A*b* = E*a* (c), adeoque E*b* = A*a* (d), & rectangulum ex *a*A in A*b* una cum quadrato ſemiaxis OA eſt æquale quadrato rectæ O*b* (e), ex eo nimirum quod ſit O*b* = O*a* (f). Ergo etiam rectangulum ex E*b* in A*b* una cum quadrato ſemiaxis OA erit æquale quadrato rectæ O*b*; atque propterea eidem quadrato rectæ O*b* duo itidem quadrata rectarum OA, OH ſimul ſumta erunt æqualia (g). Perſpicuum porro eſt, quadratum rectæ AH æquare quadrata rectarum OA, OH (h); cum angulus AOH trianguli AOH ſit rectus (i). Ergo quadratum rectæ AH æquale itidem erit quadrato rectæ O*b* (k); ac proinde rectæ AH, O*a* erunt inter ſe æquales (l). Itaque in hyperbola &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) §. 263.
(b) Syn. Alg. §. 266.
(c) §. 264.
(d) Syn. Alg. §. 266.
(e) §. 246.
(f) §. 265.
(g) Syn. Alg. §. 262.
(h) Lib. VI §. 37.
(i) §. 207.
(k) Syn. Alg. §. 262.
(l) Lib. I §. 187.

Digitized by Google

THEOREMA XIV.

In hyperbola ſemiordinata ad axim ducta ex illius foco adæquat ſemiparametrum ipſius axis.

267. Ex foco *a* hyperbolæ BAC ducatur ad axim A*a* ſemiordinata *ab*. Dico, rectam *ab* æquare dimidiam partem parametri AD.

Demonſtratio.

Cum enim rectangulum *ea* ex abſciſſa A*a* in rectam E*a* compoſitam ex ipſa abſciſſa, & ex latere tranſverſo EA ipſius hyperbolæ, ſit ad quadratum *ad* ſemiordinatæ *ab*, ut eſt axis ipſe tranſverſus AE ad parametrum AD (a), & axis tranſverſus AE ſit ad parametrum AD, ut rectangulum ex DA in AE, nempe FDAE, ad quadratum GDAH ipſius parametri (b), rectangulum *ae* erit ad quadratum *ad*, ut eſt rectangulum FDAE ad quadratum GDAH (c); & *alternando*, quadratum *ad* erit ad quadratum GDAH, ut rectangulum *ae* ad rectangulum FDAE (d). Rectangulum autem *ae* eſt in ratione *ſubquadrupla* ad rectangulum FDAE (e). Ergo etiam quadratum *ad* erit in ratione *ſubquadrupla* ad quadratum GDAH; & ideo recta *ab* erit in ratione *ſubdupla* ad parametrum AD (f). Igitur in hyperbola &c. quod erat oſtendendum. Fig. 11. T. XV.

COROLLARIUM.

268. *In omni ergo ſectione conica ſemiordinata ad axim ducta ex illius foco adæquat dimidiam partem parametri ipſius axis.* Quod enim

(a) §. 203.
(b) Lib. IX. §. 99.
(c) Lib. I. §. 76.
(d) Ibidem §. 125.
(e) §. 262.
(f) Lib. IX. §. 171.

Digitized by Google

enim modo demonſtravimus in hyperbola, oſtenſum eſt ſuperius in ellipſi (a), & in parabola (b).

LEMMA II.

Si recta linea ſecetur utcunque, rectangulum contentum ſub tota, & una parte erit æquale rectangulo comprehenſo ſub partibus una cum quadrato illius partis.

269. Secetur utcunque recta AB in *a*. Dico, rectangulum ex tota AB in partem A*a* eſſe æquale rectangulo, quod fit ex una parte B*a* in alteram A*a*, una cum quadrato ejuſdem partis A*a*.

Euclid. l. 2. p. 3

Demonſtratio I.

Ponatur $AB = m$, $Aa = n$, adeoque $aB = m - n$. Erit ergo $AB \times Aa = mn$, $Aa \times aB = nm - nn$, & $\overline{Aa}^2 = nn$; ac proinde $Aa \times aB + \overline{Aa}^2 = nm - nn + nn = nm$. Igitur, cum ſit $AB \times Aa = mn$, erit $AB \times Aa = Aa \times aB + \overline{Aa}^2$.

Fig. 11. T. XIII.

Demonſtratio II.

Deſcripto circa totam AB ſemicirculo A*b*B, recta *ab* ſit ipſi AB perpendicularis; puncta autem A, *b* jungantur recta A*b*, & puncta *b*, B recta B*b*. Quoniam igitur recta A*b* eſt media proportionalis inter totam AB, & partem A*a* (c), rectangulum ex AB in A*a* erit æquale quadrato rectæ A*b* (d). Quadratum autem rectæ A*b* eſt æquale quadratis rectarum A*a*, *ab* (e). Ergo iiſdem quadratis erit æquale etiam rectangulum ex AB in A*a* (f). Conſtat autem, quadratum rectæ *ab*

(a) §. 140.
(b) §. 190.
(c) Lib. IX. §. 74.
(d) Ibidem §. 111.
(e) Lib. VI. §. 37.
(f) Syn. Alg. §. 262.

Digitized by Google

ba eſſe æquale rectangulo ex A*a* in *a*B (a); ac proinde rectangulum ex A*a* in *a*B una cum quadrato rectæ A*a* æquare quadrata ſimul ſumta rectarum A*a*, *ab* (b). Igitur rectangulum ex AB in A*a* erit itidem æquale rectangulo ex A*a* in *a*B una cum quadrato partis A*a* (c); & ideo ſi recta &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XV.

Focorum diſtantia in hyperbola eſt media proportionalis inter axim tranſverſum, & rectam compoſitam ex ipſo axe tranſverſo, & ex parametro.

270. Puncta *a*, *m* ſint foci hyperbolæ BAC, cujus axis tranſverſus ſit recta EA, parameter AK, & recta compoſita ex axe tranſverſo, & ex parametro ſit AL. Dico, rectam *am* focis interjectam eſſe mediam proportionalem inter axim tranſverſum EA, & rectam AL. Fig. 11 T. XV.

Demonſtratio.

Quoniam rectæ *xa*, *xm* ſunt æquales (d), adeoque $am = 2xa$, quadratum rectæ *ma* erit quadruplum quadrati rectæ *xa* (e). Rectangulum autem ex E*a* in A*a*, ſeu ex *m*A in A*a*, una cum quadrato rectæ *x*A eſt æquale quadrato rectæ *x a* (f). Ergo quadratum rectæ *m a* erit quoque in ratione *quadrupla* ad rectangulum ex E*a* in A*a* ſumtum una cum quadrato rectæ *x*A (g). Manifeſtum porro eſt, rectangulum ex EA in AK eſſe quadruplum rectanguli ex E*a* in A*a* (h), & quadratum rectæ EA eſſe quadruplum quadrati rectæ *x*A (i); cum ſit EA = 2*x*A (*k*); ac proinde rectangulum ex EA in AK una cum quadrato rectæ EA eſſe in ratione *quadrupla* ad

(a) Lib. IX. §. 113.
(b) Syn. Alg. §. 262.
(c) Ibid. §. 261.
(d) §. 265.
(e) Lib. IX. §. 172.
(f) §. 246.
(g) Lib. I. §. 112.
(h) §. 262.
(i) Lib. IX. §. 172.
(k) §. 198.

ad rectangulum ex E*a* in A*a* una cum quadrato rectæ *x*A (a). Ergo rectangulum ex EA in AK una cum quadrato rectæ EA erit æquale quadrato rectæ *ma* (b). Rectangulum autem ex EA, ſeu KL in AK, una cum quadrato rectæ EA, ſeu KL adæquat rectangulum ex AL in KL (c). Igitur rectangulum ex AL in KL erit æquale quadrato rectæ *ma* (d); atque propterea recta *ma* erit media proportionalis inter rectam KL, & rectam AL, ſeu inter rectas EA, AL (e). Focorum itaque diſtantia &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA XVI.

Si ex foco b *hyperbolæ BAC ducatur ad quodvis punctum C ipſius curvæ hyperbolicæ recta* bC, *& per punctum C recta tangens CM, cui ex centro O occurrat recta ON rectæ* bC *parallela, recta ON erit æqualis ſemiaxi tranſverſo OE.*

Fig. 1. T. XVI. 271. Ex altero foco *a* agatur ad tangentem CM recta *a*M rectis ON, *b*C parallela, ductiſque tangentibus verticalibus EK, A*d*, ex foco *a* ad puncta K, N, *d*, C ducantur rectæ *a*K, *a*N, *ad*, *a*C, & ex vertice E ad punctum N recta EN, ſicuti ex altero vertice A ad idem punctum N recta AN.

Demonſtratio.

Itaque cum anguli alterni NC*b*, CNO parallelarum NO, *b*C ſint æquales (f), ſicuti etiam angulus externus ONC, & internus *a*MC parallelarum *a*M, ON (g), duo anguli NC*b*, NM*a* erunt inter ſe æquales (h). Angulus autem MC*a* adæquat angulum MC*b* (i). Ergo angulus MC*a* angulum quoque NM*a* æquabit (k), eruntque propterea duo latera *a*M, *a*C trianguli M*a*C inter ſe æqualia (l), ſeu triangulum M*a*C erit

(a) Lib. I. §. 144.
(b) Ibid. §. 103.
(c) §. 269.
(d) Synop. Alg. §. 262.
(e) Lib. IX. §. 118.
(f) Lib. IV. §. 25.
(g) Ibidem §. 14.
(h) Syn. Alg. §. 259.
(i) §. 259.
(k) Syn. Alg. §. 251.
(l) Lib. V. §. 65.

Digitized by Google

erit iſoſceles. Producta porro in R recta NO, perſpicuum eſt, in triangulo baC eſſe $aC.aR = ab.aO$ (a). In triangulo autem MCa itidem habetur $MC.MN = aC.aR$. Ergo erit $MC.MN = ab.aO$ (b); ac proinde cum ſit $ab = 2aO$, ſeu $aO = Ob$ (c), erit etiam $MC = 2MN$, ſeu $MN = NC$. Igitur recta aN ad perpendiculum inſiſtit baſi MC trianguli MaC, ſeu duo anguli MNa, aNC ſunt recti (d). Rectus porro eſt tum angulus KEa, tum angulus aAd; duoque anguli recti KNa, KEa incumbunt eidem rectæ Ka, ſicuti etiam duo aNd, aAd eidem rectæ ad. Ergo circulus KEP deſcriptus circa rectam Ka tranſibit per quatuor puncta K, N, E, a, & circulus NdQ deſcriptus circa rectam ad per quatuor puncta a, N, A, d (e); duoque propterea anguli aKE, aNE erunt æquales inter ſe, ſicuti etiam duo ANd, Aad (f), quod tam illi, quam iſti in eadem portione ejuſdem *reſpective* circuli reperiantur. Demonſtravimus autem §. 259. angulos aKE, Aad eſſe inter ſe æquales. Igitur etiam duo aNE, ANd inter ſe æquales erunt (g); unde, ſi utrique adjiciatur angulus dNE, totus angulus ANE toti angulo dNa erit æqualis (h). Oſtenſum porro eſt, angulum dNa, ſive CNa eſſe rectum. Igitur etiam angulus ANE erit rectus; & ideo ſemicirculus AVE deſcriptus circa axim tranſverſum EA tranſibit per punctum N (i), cui cum occurrat recta ON, omneſque ejuſdem circuli radii ſint æquales (k), recta ON æquabit rectam, ſeu ſemiaxim tranſverſum OE. Itaque ſi ex foco &c. quod erat oſtendendum.

T 2 THEO-

(a) Lib. IX. §. 57.
(b) Lib I. §. 76.
(c) §. 265.
(d) Lib III. §. 23.
(e) Lib. VII. § 78.
(f) Ibid. §. 73.
(g) Synop. Alg. §. 259.
(h) Ibidem §. 265.
(i) Lib. VII. §. 78.
(k) Ibid. §. 10.

Digitized by Google

THEOREMA XVII.

Differentia inclinatarum ex focis ad quodvis punctum curvæ hyperbolicæ eſt æqualis axi ejuſdem tranſverſo.

Apoll. l.3.p.51 272. Ex focis a, b curvæ hyperbolicæ BAC inclinentur ad quodvis punctum C ipſius curvæ BAC rectæ aC, bC. Dico, earum differentiam eſſe æqualem axi tranſverſo EA.

Demonſtratio.

Fig. 5. T. XVI. Ducta namque per punctum C tangente CM, ex foco a agatur recta aM parallela rectæ bC, & ex centro O recta ON iiſdem aM, bC parallela, quæ directe producatur in R. Quoniam igitur in triangulo MCa ex facta conſtructione habetur $aM . NR = aC . RC$ (a), ſive, propter æqualitatem rectarum aM, aC in præcedenti theoremate oſtenſam; $aC . NR = aC . RC$, & in triangulo baC haud diſſimili ratione $bC . OR = ab . aO$, ſeu ob æqualitatem rectarum aO, Ob (b), $bC . OR = ab . Ob$, nec non $ab . Ob = aC . RC$ (c), erit $aC . NR = bC . OR$ (d); & ideo $aC - bC . NR - OR = bC . OR$ (e). Conſtat autem ex eo, quod ſit $bC . OR = ab . aO$, rectam bC eſſe duplam rectæ OR, ſicuti recta ab eſt dupla rectæ aO (f). Ergo etiam terminus $aC - bC$, ſeu differentia rectæ aC a recta bC, erit dupla differentiæ, quam habet recta NR a recta OR. Hæc autem poſterior differentia eſt recta NO, quæ adæquat ſemiaxim tranſverſum EO (g). Ergo differentia rectæ aC a recta bC erit dupla ſemiaxis tranſverſi EO, ſeu integrum ipſum axim EA æquabit. Itaque differentia &c. quod erat oſtendendum.

COROL-

(a) Lib. IX. §. 59.
(b) §. 265.
(c) Lib. IX. §. 57.
(d) Lib. I. §. 76.
(e) Ibidem §. 152.
(f) §. 265.
(g) §. 271.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

Differentia duarum rectarum inclinatarum ex focis ad unum punctum curvæ hyperbolicæ adæquat differentiam aliarum duarum inclinatarum ad aliud quodvis punctum ejuſdem curvæ.

273. Si nimirum ex focis *a*, *b* hyperbolæ BAC inclinentur ad punctum *e* curvæ hyperbolicæ BAC duæ rectæ *ae*, *be*, Fig. 5. T. XVI.
& ad punctum aliud C duæ rectæ *a*C, *b*C, differentia duarum *ae*, *be* æquabit differentiam duarum *a*C, *b*C. Utraque ſiquidem hujuſmodi differentia eſt æqualis axi tranſverſo EA. Ergo ſunt inter ſe æquales (a).

THEOREMA XVIII.

Si in recta linea tangente hyperbolam in vertice ſumantur hinc inde a vertice partes æquales, quarum utraque ſit æqualis ſemidiametro conjugatæ; tum ex centro per illarum partium extrema ducantur rectæ lineæ, hæ ad curvam hyperbolicam in infinitum abeuntem ſemper propius accedent, ſi in infinitum productæ fuerint, nunquam vero cum illa convenient.

274. Per verticem A hyperbolæ BAC, cujus diameter Fig. 6. T. XVI. Apoll. l. 2. p. 1
tranſverſa ſit recta AG, & parameter recta A*m*, ducatur tangens DE, in qua hinc inde ab ipſo vertice A ſumtis partibus AD, DE, quæ ſint æquales ſemidiametro conjugatæ FV, ex centro F per extrema ipſarum rectarum puncta D, E agantur rectæ FL, FM. Dico, rectas FL, FM, quantumvis directe producantur, nunquam convenire poſſe cum hyperbolica curva BAC in infinitum abeunte, etſi ad eam continuo propius accedant.

Demon-

(a) Syn. Alg. §. 259.

Demonſtratio.

Ducatur ordinata quæcunque *ae*, quæ hinc inde uſque ad ipſas rectas FL, FM producatur, & quoniam in triangulo *b*F*d* rectæ DE, *bd* ſunt parallelæ (a), erit *b*N . N*d* = DA . AE (b); atque propterea, ſicuti habetur DA = AE, ita erit *b*N = N*d* (c). Similiter in triangulo *b*FN cum ſit *b*N . NF = DA . AF (d), quadratum rectæ *b*N erit ad quadratum rectæ NF, ut quadratum rectæ DA ad quadratum rectæ AF (e). Quadratum autem rectæ DA eſt ad quadratum rectæ AF, ut eſt rectangulum ex parametro *m*A in diametrum tranſverſam AG ad quadratum ipſius diametri AG; cum eadem ſit ratio *ſubquadrupla* tum quadrati rectæ DA ad rectangulum ex *m*A in AG (f), tum quadrati rectæ AF ad quadratum rectæ GA (g). Ergo quadratum quoque rectæ *b*N erit ad quadratum rectæ NF, ut rectangulum ex *m*A in AG ad quadratum rectæ AG (h); & quoniam rectangulum ex *m*A in AG eſt ad quadratum rectæ AG, ut parameter *m*A ad diametrum ipſam tranſverſam AG (i), ſcilicet ut altitudines, quadratum rectæ *b*N erit ad quadratum rectæ NF, ut parameter *m*A ad diametrum tranſverſam AG (k). Perſpicuum porro eſt, quadratum quoque ſemiordinatæ *a*N eſſe ad rectangulum ex GN in AN, ut parameter *m*A ad diametrum tranſverſam AG (l). Igitur quadratum rectæ *b*N erit ad quadratum rectæ NF, ut quadratum ſemiordinatæ *a*N ad rectangulum ex GN in AN (m). Quadratum autem rectæ *b*N adæquat rectangulum ex *ba* in *ad* una cum quadrato rectæ *a*N (n); cum jam ſit *b*N = N*d*, & quadratum rectæ NF adæquat rectangulum ex GN in AN una cum quadrato rectæ FA (o), propterea quod ſit AF = FG (p). Ergo, cum quadratum rectæ *b*N ſit ad quadratum rectæ NF,

ut

(a) §. 22.
(b) §. 92.
(c) Lib. I. §. 45.
(d) Lib. IX. §. 60.
(e) Lib. I §. 188.
(f) §. 209.
(g) Lib. IX §. 172.
(h) Lib I. §. 77.
(i) Lib. IX. §. 100.
(k) Lib. I, §. 78.
(l) §. 203.
(m) Lib. I. §. 76.
(n) §. 246.
(o) Ibidem.
(p) §. 198.

Digitized by Google

ut quadratum rectæ *a*N ad rectangulum ex GN in AN, ut ſupra demonſtravimus, his *reſpective* detractis, reſiduum rectangulum ex *ba* in *ad* erit ad reſiduum quadratum rectæ AF, ut eſt quadratum rectæ *b*N ad quadratum rectæ NF (a). Oſtenſum porro eſt, quadratum rectæ DA eſſe ad quadratum rectæ AF, ut quadratum rectæ *b*N ad quadratum rectæ NF. Igitur rectangulum ex *ba* in *ad* erit ad quadratum rectæ AF, ut eſt quadratum rectæ DA ad idem quadratum rectæ AF (b); quapropter rectangulum ex *ba* in *ad* erit ęquale quadrato rectę DA (c); & ideo habebitur *ad*. DA = DA. *ba* (d). Hinc, cum recta *ad* ſemper excedat rectam DA, ut patet, etiam recta DA ſemper major erit recta *ba* (e); & ideo, cum in infinitum abeunte curva hyperbolica BAC, continuo magis ac magis augeatur recta *ad* ſupra rectam conſtantem DA, ita recta DA majorem ſemper atque majorem habere debet rationem ſupra rectam *ba*, ſeu recta *ba* debet in infinitum decreſcere, quin unquam evaneſcat, ne ſcilicet evaneſcat rectangulum, quod ſemper fieri debet ex ipſa recta *ad* in rectam *ba*, quæ inter curvam hyperbolicam B*a*A, & rectam FL reperitur, quadrato rectæ DA perpetuo æquale. Itaque ſi in recta linea &c. quod erat oſtendendum.

DEFINITIO XVI.

275. Rectæ FL, FM, quæ licet in infinitum directe producantur, nunquam convenire poſſunt cum hyperbolica curva BAC, quamvis & ipſa quoque in infinitum abeat, ipſæque rectæ FL, FM continuo ad ipſam curvam propius ſemper accedant, *aſymptoti* hyperbolæ BAC vocantur.

CO-

(a) Lib. I. §. 149.
(b) Ibid. §. 77.
(c) Ibidem §. 103.
(d) Lib. IX. §. 118.
(e) Lib. I. §. 45.

COROLLARIUM I.

276. Si *aſymptoti* FL, FM directe ultra centrum F producantur in S, R, rectę FS, FR erunt *aſymptoti* hyperbolę HGK priori BAC oppoſitæ. Quandoquidem, ducta per verticem G tangente PQ parallela tangenti DE, cum anguli DFA, GFQ ad verticem ſint æquales (a), ſicuti etiam anguli parallelarum alterni FAD, FGQ, & FDA, FQG (b), duo triangula DAF, GFQ, utpote ęquiangula, erunt ſimilia (c), & latera FA, FG * DA, GQ homologa (d). Igitur erit DA.GQ = FA.FG (e). Eſt autem FA = FG (f). Ergo erit etiam DA = GQ (g). Eandemque ob cauſam habebitur etiam AE = PG. Quamobrem cum ſit DA = AE, erit etiam PG GQ (h), & recta PG, ſicuti etiam GQ, æquabit ſemidiametrum conjugatam VF. Igitur, cum hyperbolæ BAC, HGK ſint ſimiles, & æquales, qua ratione rectæ FL, FM ſunt *aſymptoti* hyperbolę BAC, eadem ratione rectę FR, FS erunt *aſymptoti* hyperbolę oppoſitę HGK.

COROLLARIUM II.

277. Quęvis recta ducta intra angulum AFM, ut *xy*, parallela *aſymptoto* FM, ſi in directum producatur, occurrit tandem curvæ hyperbolicæ BAC. Etenim, cum ſpatium inter parallelas FM, *xy* idem ſemper maneat, illud vero continuo decreſcat, quod curva A*e*C, & *aſymptoto* FM continetur, neceſſe eſt, ut hujuſmodi ſpatia tandem evadant æqualia, ac proinde recta *xy* curvæ A*e*C tandem occurrat.

COROLLARIUM III.

278. Quęlibet alia recta linea ducta ex centro F, ut Fz, F*n*, ſi directe producatur, vel hyperbolam HGK tandem ſecat, vel

(a) Lib. III. §. 51.
(b) Lib. IV. §. 15.
(c) Lib. IX. §. 66.
(d) Ibid. §. 67.
(e) Ibid. §. 77.
(f) §. 198.
(g) Lib. I. §. 45.
(h) Syn. Alg. §. 263.

Digitized by Google

vel ab illa continuo remotior efficitur. Recta ſiquidem Fz, quo magis producitur, eo magis recedit ab *aſymptoto* FR in ſpatio omnino extraneo. At vero recta F*n* magis quidem ſemper recedit ab *aſymptoto* FR, ſed cum continuo minuatur ſpatium, *aſymptoto* FR, & curva hyperbolica HG comprehenſum, conſectarium eſt, ut recta F*n* curvæ HG tandem occurrat, eamque diſpeſcat.

COROLLARIUM IV.

279. Hinc *aſymptoti* hyperbolæ HGK non ſunt niſi rectæ FR, FS; ut proinde *unius hyperbolæ unicæ ſint aſymptoti*.

COROLLARIUM V.

280. Segmenta *ba*, *ed* rectæ *bd*, *aſymptotis* FL, FM, & curvæ hyperbolicæ BAC interjecta, ſunt æqualia. Cum enim ſit $bN.Nd = DA.AE$ (a), ſicuti eſt $DA = AE$, ita erit $bN = Nd$ (b). Eſt autem $eN = Ne$ (c). Ergo erit etiam $ba = ed$ (d). Eadem ratione perſpicuum fiet, eſſe itidem $LB = CM$.

COROLLARIUM VI.

281. Rectangulum ex *ba* in *ad* adæquat rectangulum ex *ed* in *be*. Sicuti enim rectangulum ex *ba* in *ad* eſt æquale quadrato rectæ DA, ita rectangulum ex *ed* in *be* eſt æquale quadrato rectæ AE. Quadrata autem rectarum DA, AE ſunt æqualia (e). Ergo etiam rectangula $ba \times ad$, $ed \times be$ erunt æqualia (f).

(a) §. 92.
(b) Lib. I. §. 45.
(c) §. 12.
(d) Synop. Alg. §. 266.
(e) Lib. I. §. 187.
(f) Syn. Alg. §. 259.

Digitized by Google

COROLLARIUM VII.

282. Rectangulum quoque ex *ba* in *ad* eſt æquale rectangulo ex LB in BM, ſi recta LM parallela itidem fuerit eidem tangenti DE. Utrumque enim horum rectangulorum eſt æquale quadrato rectæ DA.

COROLLARIUM VIII.

283. Hinc erit *ba*.LB = BM.*ad* (a). Unde ſicuti recta BM in receſſu a vertice A magis ac magis magnitudine ſuperat rectam *ad*, ita recta *ba* magis ac magis in ejuſmodi receſſu excedit rectam LB, ſeu recta LB continuo minuitur.

COROLLARIUM IX.

284. Si hyperbola BAC fuerit æquilatera, nempe ſi parameter A*m* fuerit æqualis lateri tranſverſo GA, *aſymptoti* FL, FM angulum rectum LFM comprehendent. Cum enim, hac ſtante hypotheſi, rectangulum ex GA in A*m* non ſit diverſum a quadrato ipſius lateris tranſverſi GA, quadrata rectarum DA, AF erunt in ratione ſubquadrupla ad idem quadratum; adeoque erunt æqualia (b). Igitur etiam rectæ DA, AF erunt æquales (c). Rectus autem eſt angulus DAF (d). Ergo reliqui duo anguli AFD, ADF trianguli DAF erunt uni recto æquales (e). Sunt autem æquales inter ſe (f). Igitur uterque erit medietas unius anguli recti. Eodem modo oſtendam, etiam angulum AFE æquare dimidiam partem unius anguli recti. Igitur angulus LFM eſt rectus.

CO-

(a) Lib. IX. §. 114.
(b) Lib. I. §. 103.
(c) Ibid §. 187.
(d) §. 24.
(e) Lib. V. §. 47.
(f) Ibidem §. 60.

Digitized by Google

COROLLARIUM X.

285. Si per quodvis punctum *a* curvæ hyperbolicæ BAC ducatur tangens FH, quæ occurrat *aſymptotis* GD, GL, ipſa FH bifariam ſecta erit in *a* a diametro GM per illud punctum traducta. Etenim, ſi ſecus, vel rectæ GD, GL non eſſent *aſymptoti* hyperbolæ BAC; cum, poſita inæqualitate ipſarum *a*F, *a*H, alterutrum quadratorum rectarum *a*F, *a*H tunc non ſit æquale quadrato ſemidiametri conjugatæ, & ſic alterutra rectarum GD, GL non eſt *aſymptotus*; vel utrumque eorundem quadratorum eſſet eidem quadrato conjugatæ ſemidiametri inæquale; ac propterea neutra rectarum GD, GL eſt *aſymptotus* curvæ hyperbolicæ BAC contra hypotheſim. Rectæ igitur *a*F, *a*H ſunt æquales inter ſe, & quadratum utriuſque eſt æquale quadrato ſemidiametri diametro G*a* conjugatæ. Fig. 7. T. XVI.

COROLLARIUM XI.

286. Ductis quoque ordinatis *bm*, *dn*, ipſiſque ad *aſymptotos* uſque productis, ſegmenta E*b*, *m*K, ſicuti etiam ſegmenta D*d*, *n*L, erunt æqualia. Patet ex §.

COROLLARIUM XII.

287. Rectangulum ex E*b* in *b*K eſt ęquale quadrato rectę *a*F. Oſtenditur eodem modo, quo demonſtratum eſt ipſum theorema.

COROLLARIUM XIII.

288. Rectangulum ex E*b* in *b*K adęquat rectangulum ex K*m* in *m*E. Similiter idem rectangulum ex E*b* in *b*K eſt æquale rectangulo ex D*d* in *d*L; atque propterea habetur E*b*. D*d* = *d*L. *b*K. Manifeſtum eſt quoad omnes partes

ex §§. 281. 282. 283. Eædem quippe demonſtrationes hic quoque locum habent.

THEOREMA XIX.

Si per puncta, in quibus duæ rectæ parallelæ hyperbolam ſecant, ducantur rectæ, quæ occurrant aſymptotis, & ſint illis parallelæ, hujuſmodi rectæ erunt proportionales.

289. Hyperbolam BAC ſecent duæ rectæ parallelæ *ab*, BC in punctis *a*, *b*, B, C, ex quibus ad *aſymptotos* DG, DL ducantur rectæ *a*E, BF parallelæ *aſymptoto* DL, & rectæ *b*H,
Fig. 1. T. XVI. CK parallelæ *aſymptoto* DG. Dico, rectas CK, *b*H, BF, *a*E eſſe inter ſe proportionales, videlicet eſſe CK.*b*H = BF.*a*E.

Demonſtratio.

Rectæ *ab*, BC producantur in directum, donec *aſymptotis* occurrant. Cum igitur in triangulo GDL recta CK poſita ſit parallela rectæ GD, erit CK.KL = GD.DL (a). Eſt autem haud diſſimili ratione etiam GF.FB = GD.DL. Ergo erit CK.KL = GF.FB (b). Eodem modo oſtendam, eſſe *b*H.H*d* = *e*E.E*a*, quatenus nempe utraque iſtarum rationum eſt illi æqualis, quam habet in triangulo *e*D*d* latus *e*D ad latus D*d*. Conſtat autem, eſſe GD.DL = *e*D.D*d* (c); cum recta *e d* poſita ſit parallela rectæ GL. Igitur erit CK.KL = *b*H.H*d*, *b*H.H*d* = GF.FB, GF.FB = *e*E.E*a*, ſive CK.KL = *b*H.H*d* = GF.FB = *e*E.E*a* (d); & ideo CK.*b*H = KL.H*d* = *b*H.GF = H*d*.FB = GF.*e*E = FB.E*a* (e); ac proinde CK.*b*H = FB.E*a* (f). Ergo, ſi per puncta &c. quod erat oſtendendum.

THEO-

(a) Lib. IX. §. 60.
(b) Lib. I. §. 76.
(c) Lib. IX. §. 58.
(d) Lib. I. §. 76.
(e) Ibidem §. 125.
(f) Ibidem §. 76.

THEOREMA XX.

Si linea hyperbolam ſecans aſymptotis occurrat, & per puncta ſectionum ducantur rectæ aſymptotis parallelæ, parallelogramma, quæ hinc fiunt, erunt æqualia.

290. Recta BC ſecet hyperbolam BAC, ejuſque *aſymptotis* DE, DG occurrat in punctis E, G. Ductis autem ex punctis B, C rectis BK, BF, CH, CL, quæ ſint *aſymptotis* parallelæ, fiant parallelogramma KBFD, CLDH. Dico, iſta parallelogramma eſſe æqualia. Fig. 1. T.XVII.

Demonſtratio.

Quoniam rectæ EB, CG ſunt æquales (a), ſi utrique adjiciatur recta BC, erit EC = BG (b); ac proinde EC. EB = BG. CG (c). Perſpicuum eſt autem, ob paralleliſmum rectarum KB, LC in triangulo LEC, eſſe LC. KB = EC. EB(d), & in triangulo BGF haud diſſimili ratione haberi BF. CH = BG. CG. Ergo erit LC. KB = BF. CH (e); & ideo KB×BF = LC×CH, ſive KBFD = CLDH (f). Igitur ſi linea &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

291. Etiam parallelogramma BKDF, *bae*D, quæ eodem modo fiunt ad eandem partem hyperbolæ, ſunt ęqualia. Quandoquidem, ſi jungantur puncta *a*, C recta *a*C, duo parallelogramma *bae*D, LCHD erunt ęqualia. Sunt autem ęqualia etiam duo KBFD, LCHD. Ergo duo quoque BKDF, *bae*D ſunt ęqualia (g).

CO-

(a) §. 286.
(b) Syn. Alg. §. 265.
(c) Lib. I. §. 102.
(d) Lib. IX. §. 59.
(e) Lib. I. §. 76.
(f) Lib. IX. §. 107.
(g) Syn. Alg. §. 259.

Digitized by Google

COROLLARIUM II.

292. Ductis rectis BD, *a*D, CD, triangula BDK, *a*D*b*, CDH ſunt inter ſe æqualia. Sunt enim pars dimidia parallelogrammorum æqualium (a).

COROLLARIUM III.

293. Si uni *aſymptoto* DG ex punctis C, *a*, B ſumtis in curva hyperbolica BAC agantur rectæ parallelæ CL, *ab*, BK, quæ alteri *aſymptoto* DE occurrant, erit KB.*ba* = D*b*.DK, ſicuti etiam KB.LC = DL.DK, nec non *ba*.LC = DL.D*b*. Etenim conſtitutis rectangulis KBFD, *bae*D, LCHD, cum duo KBFD, *bae*D ſint æqualia (b), erunt latera eorum reciproce proportionalia (c). Ergo erit KB.*ba* = D*b*.DK. Eodem modo perſpicuum fiet, eſſe KB.LC = DL.DK, nec non *ba*.LC = DL.D*b*.

COROLLARIUM IV.

Fig. 2. T.XVII. 294. Si *aſymptoto* AH agantur duæ rectæ parallelæ CF, DE, & ex puncto, ſeu apice A anguli MAH per punctum F ducatur recta AL, cui occurrat recta DE directe producta, rectæ DE, CF, DL erunt continuo proportionales. Cum enim ſit DE.CF = AC.AD (d), & AC.AD = CF.DL (e), erit ∺ DE.CF.DL (f).

COROLLARIUM V.

Fig. 2. T.XVII. 295. Si *aſymptotus* AM proportionaliter dividatur in punctis B, C, D, ita nimirum ut ſit AB.AC = AC.AD, ductis ex punctis B, C, D ad curvam hyperbolicam EFG rectis BG, CF, DE, quę ſint parallelæ alteri *aſymptoto* AH, erit

(a) Lib. I. §. 126. & §. 45.
(b) §. 291.
(c) Lib. IX. §. 115.
(d) §. 293.
(e) Lib. IX. § 59.
(f) Lib. I. §. 76.

erit quoque DE . CF = CF . BG . Quandoquidem, cum ſit CF . BG = AB . AC, & DE . CF = AC . AD (a), profecto, ſtante hypotheſi, erit DE . CF = CF . BG (b).

THEOREMA XXI.

Si una hyperbolæ aſymptotus proportionaliter dividatur, & ex punctis hujuſce diviſionis ducantur ad curvam hyperbolicam rectæ lineæ alteri aſymptoto parallelæ, trapezia hyperbolica hiſce rectis determinata, erunt æqualia.

296. *Aſymptotus* DE hyperbolæ BAC proportionaliter dividatur in punctis G, H, T, ita nimirum ut ſit DG . DH = DH . DT, & ex ipſis punctis G, H, T ad curvam hyperbolicam BAC ducantur rectæ GA, HK, TC parallelæ alteri *aſymptoto* DF. Dico, trapezia hyperbolica GAKH, HKCT eſſe inter ſe æqualia. Fig. 3. T. XVII.

Demonſtratio.

Ex punctis A, K, C ducantur ad alteram *aſymptotum* DF rectæ AL, KM, CN parallelæ *aſymptoto* DE. Tum rectæ CT, AL in directum productæ concurrant in puncto R. Quoniam igitur habetur KH . CT = DT . DH (c), & per hypotheſim DT . DH = DH . DG, erit quoque KH . CT = DH . DG (d). Eſt autem KH = MD, & CT = ND (e), ac proinde MD . ND = KH . CT. Ergo erit MD . ND = DH . DG (f), & *alternando*, MD . DH = ND . DG (g). Ergo duo parallelogramma N*a*GD, MKHD ſunt ſimilia (h). Eodem modo perſpicuum itidem fiet, ſimilia eſſe inter ſe etiam duo parallelogramma LRTD, MKHD; atque propterea tria parallelogramma LRTD, MDHK, N*a*GD eſſe ſimi-

(a) §. 293.
(b) Lib I. § 76.
(c) §. 293.
(d) Lib. I. §. 76.
(e) Lib. VI. § 20.
(f) Lib. I. §. 77.
(g) Ibidem §. 125.
(h) Lib. IX. §. 1.

Digitized by Google

ſimilia. Quamobrem, tria hujuſmodi parallelogramma poſita erunt circa eandem diametrum (a), ſeu recta ducta ex puncto D ad punctum R tranſibit per puncta *a*, K, & ducta altera diametro AC in parallelogrammo *a*ARC, hæc bifariam diviſa erit in puncto *m* a diametro *a*R, & ideo ſectum quoque erit bifariam ſegmentum hyperbolicum AKC*m*A a recta DR (b). Si ergo ex puncto D ad extrema puncta A, C agantur rectæ DA, DC, cum duo triangula AD*m*, CD*m* ſint æqualia (c), demtis ſpatiis hyperbolicis AK*m*, *m*KC, reliquum ſpatium ADK erit æquale reliquo ſpatio KDC (d). Manifeſtum porro eſt, triangula ADG, KDH eſſe inter ſe æqualia (e); cum ſint pars dimidia (f) parallelogrammorum æqualium LAGD, MKHD (g). Igitur, ſublato communi triangulo *a*GD, reliquum triangulum A*a*D erit æquale reliquo trapezio K*a*GH (h); his vero addito ſpatio AK*a*, triangulum hyperbolicum ADK æquabit trapezium hyperbolicum AKHG (i). Similiter quoniam triangulum CDT adequat triangulum *KDH*, utpote quæ ſunt partes dimidiæ porallelogrammorum æqualium CN*D*T, *K*H*D*M, demto utrique communi triangulo *eD*H, reliquum triangulum *KDe* erit æquale trapezio reſiduo *e*CTH; his autem addito ſpatio *Ke*C, trapezium hyperbolicum *K*CTH æquabit triangulum hyperbolicum *KDC*. Igitur ſicuti trapezium A*K*HG adæquat triangulum A*DK*, ita trapezium *K*CTH adæquat triangulum *KDC*. *D*emonſtravimus autem, duo triangula A*DK*, *KD*C eſſe inter ſe æqualia. Ergo etiam duo trapezia A*K*HG, *K*CTH erunt inter ſe æqualia (*k*).

COROLLARIUM I.

297. Si *aſymptotus* BA hyperbolæ G*D* ita dividatur in punctis M, L, H, A, ut ſit BM . BL = BH . BA, ductis ad curvam

(a) Lib. IX. §. 85.
(c) §. 249.
(c) Lib. IX. §. 93.
(d) Synop. Alg. §. 266.
(e) Lib. I. §. 103.
(f) Lib. VI §. 21.
(g) §. 291.
(h) Syn. Alg. §. 266.
(i) Ibidem §. 265.
(k) Ibidem §. 259.

Digitized by Google

vam hyperbolicam ordinatis MD, LE, HF, AG parallelis alteri *aſymptoto* BC, trapezia hyperbolica LMDE, AHFG erunt æqualia. Poſita namque recta B*a* media proportionali inter ſegmenta BL, BH, & ducta recta *ab*, cum ex hypotheſi habeatur BM . BL = BH . BA, rectangulum ex BM in BA erit æquale rectangulo ex BL in BH (a). Rectangulum autem ex BL in BH eſt æquale quadrato rectæ B*a* (b). Ergo etiam rectangulum ex BM in BA erit eidem quadrato rectæ B*a* æquale (c); ac proinde erit BM . B*a* = B*a* . BA (d), ſicuti eſt BL . B*a* = B*a* . BH. Igitur trapezium hyperbolicum M*ab*D æquabit trapezium hyperbolicum A*ab*G (e). Trapezium autem *a*LE*b* eſt eandem quoque ob cauſam trapezio H*ab*F æquale. Ergo, his ſublatis, reliquum trapezium LMDE æquabit reliquum trapezium AHFG (f). Fig. 4. T. XVII.

COROLLARIUM II.

298. Etiam triangula EBD, GBF ſunt æqualia. Etenim, ſi jungantur puncta B, *b* recta B*b*, triangulum *b*BD erit æquale triangulo GB*b*, & triangulum *b*BE triangulo FB*b*, ut patet ex demonſtratione theorematis. Ergo, demtis æqualibus *b*BE, FB*b*, etiam reliquum EBD reliquo GBF erit æquale (g).

COROLLARIUM III.

299. Si rectæ BM, BL, BH, BA fuerint continuo inter ſe proportionales, trapezia LMDE, HLEF, AHFG erunt æqualia. Sunt enim tam duo LMDE, HLEF, quam duo HLEF, AHFG inter ſe æqualia (h).

(a) Lib. IX §. 107.
(b) Ibidem §. 111.
(c) Syn. Alg. §. 262.
(d) Lib. IX. §. 118.
(e) §. 296.
(f) Syn. Alg. §. 266.
(g) Ibidem,
(h) § 297.

Digitized by Google

COROLLARIUM IV.

300. Poſita proportione continua rectarum BM, BL, BH, BA, etiam triangula EBD, FBE, GBF erunt æqualia (a).

COROLLARIUM V.

301. Hinc, ſi *aſymptotus* BA in infinitum producta ea ratione dividatur, ut partes BM, BL, BH, BA &c. creſcant ſecundum progreſſionem Geometricam, tam trapezia LMDE, HMDF, AMDG &c. quam triangula EBD, FBD, GBD &c. progreſſionem Arithmeticam creſcentem; rectæ vero MD, LE, HF, AG &c. progreſſionem Geometricam decreſcentem exhibebunt. Eſt enim AG.HF = BH.BA, & HF.LE = BL.BH &c. (b).

COROLLARIUM VI.

302. Cum diviſio *aſymptoti* BA directe in infinitum productæ, poſſit in infinitum continuari, determinari poterunt in ſpatio, quod *aſymptoto* BA, & curva hyperbolica DG continetur, infinita trapezia trapezio LMDE æqualia. Aſymptoticum propterea ejuſmodi ſpatium infinitum vocant Geometræ.

ELE-

(a) § 298. (b) §. 293.

Digitized by Google

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER XVI.

De ſimilitudine, proportione, & dimenſione ſectionum conicarum, atque ſolidorum, quæ ex illarum circum axim revolutione generantur.

TRadita natura ſectionum conicarum, affectionibuſque præcipuis, quæ illis inſunt, ſi *abſolute* ſpectentur, demonſtratis, reliquum eſt, ut de *ſimilitudine*, *proportione*, ac *dimenſione* earundem, ſimulque ſolidorum, quæ ex illarum circum axim revolutione fiunt, agamus. Eximia porro eſt hæc altera conicæ doctrinæ pars, & plane digna, ut quamaccurate pertractetur. Mira enim ſunt, quæ in ea demonſtrantur, atque inſuper theoria ſimilitudinis & proportionis inter ſe mutuo tam planorum, quam ſolidorum ſuum hinc conſequitur finem, & complementum.

DEFINITIO I.

1. *Ellipſes ſimiles dicuntur illæ, quarum axes ſunt proportionales*. Similes nimirum ſibi mutuo erunt ellipſes Fig. 5.
ABCD, *abcd*, ſi in ellipſi ABCD major axis AC fuerit ad Fig. 6. T.XVII.
minorem BD, ut in ellipſi *abcd* eſt major axis *ac* ad minorem *bd*.

COROLLARIUM I.

2. *Eadem eſt ratio axium homologorum ellipſium ſimilium*.

Enimvero cum ſit AC, BD = *ac, bd*, erit quoque AC. *ac* = BD. *bd* (a).

COROLLARIUM II.

3. *Rectangula circumſcripta ellipſibus ſimilibus ſunt ſibi mutuo ſimilia*. Ut ſi ellipſibus ABCD, *abcd* circumſcripta ſint rectangula PNM, *pnm*, hæc erunt ſibi mutuo ſimilia. Sunt enim ſibi mutuo æquiangula hoc ipſo, quod ſunt rectangula; & habent latera circa æquales angulos proportionalia. Quippe, cum ſit PN = AC, NM = BD, *pn* = *ac*, *nm* = *bd*, erit PN. NM = *pn*. *nm*, ſicuti eſt AC. BD = *ac*. *bd*.

DEFINITIO II.

4. *Sphærois eſt ſolidum unica curva ſuperficie undique comprehenſum, genitum ex completa revolutione ſemiellipſis circa* Fig. 7. T. XVII. *alterum ſuorum axium penitus immobilem*. Hujuſmodi eſt ſolidum ABCD productum ex completa revolutione ſemiellipſis ABC circa quieſcentem axin AC.

DEFINITIO III.

5. *Axis ſphæroidis eſt axis ſemiellipſis generatricis, circa quemdum rotatur ſemiellipſis, ſphærois ipſa producitur*. Sic recta AC eſt axis ſphæroidis ABCD.

DEFINITIO IV.

6. *Poli ſphæroidis ſunt duo puncta extrema axis*. Ut ſi recta AC fuerit axis ſphæroidis ABCD, ejus poli erunt duo puncta A, C.

DEFI-

(a) Lib. I. §. 125.

Digitized by Google

DEFINITIO V.

7. *Centrum ſphæroidis eſt punctum medium axis*. Tale eſt punctum E in ſphæroide ABCD. Dicitur autem centrum, quia omnes rectæ per illud tranſeuntes, & uſque ad curvam ſphæroidis ſuperficiem protenſæ, bifariam, ut patebit, in illo dividuntur.

DEFINITIO VI.

8. Cum duo ſint axes ellipſis, duplex ſphærois jure diſtinguitur, quarum altera *oblonga*, ſive *depreſſa circa axim*; altera *lata*, ſive *depreſſa circa polos* nuncupatur. *Sphærois oblonga eſt illa, quæ fit ex revolutione ſemiellipſis circa majorem axim*, ut ſphærois ABCD genita ex revolutione ſemiellipſis ABC circa majorem axim AC. *Sphærois vero lata eſt illa, quæ ex ſemiellipſis circa minorem axim rotatione producitur*, ut ſphærois AMDN genita ex rotatione ſemiellipſis AMD circum axim minorem AD. Hæc idcirco *ceppæ* ſimilis eſt; illa vero *ovi* figuram refert. Fig. 7. Fig. 10. T. XVII.

COROLLARIUM I.

9. *Axis ſphæroidis oblongæ eſt maxima omnium rectarum, quæ per illius centrum tranſeunt; omnium vero minima axis ſphæroidis latæ*. Major ſiquidem axis ellipſeos eſt omnium diametrorum maxima; minima vero axis minor (a).

COROLLARIUM II.

10. *Omnis ſectio ſphæroidis peracta plano per axim eſt ellipſis*. Illa namque planum exhibet, ex quo rotante ſphærois generatur.

CO-

(a) Lib. XV. §. 113.

COROLLARIUM III.

11. *Quævis ſectio ſphæroidis peracta plano, cui axis ad perpendiculum incumbat, eſt circulus*. Hujuſmodi namque ſectiones determinantur ex revolutione ſemiordinatarum ad axim ellipſis generaticis. Hinc

COROLLARIUM IV.

12. Cum in ellipſi maxima ſemiordinatarum ad unum axim ſit alter axis ejuſdem (a), ſemiordinatæ ad axim eo minores ſint, quo magis a centro recedunt (b), & ſemiordinatæ æqualiter a centro diſtantes ſint æquales (c), *in ſphæroide circulus omnium maximus erit ille, qui per centrum tranſit; aliorum vero, qui propinquior eſt centro, erit remotiore major; & circuli æqualiter hinc inde a centro diſtantes, erunt æquales* (d).

COROLLARIUM V.

13. *Circulus maximus in ſphæroide lata eſt ille, cujus diameter eſt axis major ellipſis generatricis; in ſphæroide vero oblonga eſt ille, cujus diameter eſt minor axis ejuſdem ellipſis*. Etenim in ſphæroide lata circulus per centrum tranſiens oritur ex revolutione ſemiaxis majoris ellipſis generatricis; in ſphæroide vero oblonga circulus, qui per centrum tranſit, ex revolutione ſemiaxis minoris ejuſdem ellipſis producitur.

COROLLARIUM VI.

14. *In ſphæroide omnis recta per centrum tranſiens, & utrinque ad curvam ſphæroidis ſuperficiem terminata, biſariam in ipſo centro dividitur*. Omnis enim hujuſmodi recta in ellipſi generatrice biſariam ſecatur in ipſo centro (e).

CO-

(a) Lib. XV. §. 61.
(b) Ibid. §. 62.
(c) Ibid. §§. 45. 53.
(d) Lib. IX. §. 50.
(e) Lib. XV. §. 68.

Digitized by Google

COROLLARIUM VII.

15. *Superficies ſphæroidis producitur a ſemiperimetro ellipſeos rotantis circum axim.* Ut enim ſoliditas ſphæroidis a plano ſemielliptico, ita illius ſuperficies a perimetro ipſius plani in ipſa eadem revolutione generatur.

SCHOLION.

16. Menſura rotationis ſemiellipſis in geneſi ſphęroidis eſt peripheria circuli per illius centrum tranſeuntis, ſive in ipſa ſphæroide maximi. Hæc enim ſola eſt quantitas certa, & invariabilis, penes quam illius rotationis menſura deſumi poſſit.

DEFINITIO VII.

17. Si circa eundem axim AC ſimul revolvantur ſemiellipſis ABC, & rectangulum AEMC illi circumſcriptum, cylindrus EMNF genitus in illa revolutione a rotante rectangulo dicitur circumſcriptus ſphæroidi ABCD, quæ in illa eadem revolutione a rotante ſemiellipſi ABC producitur. Fig. 11. T. XVII.

COROLLARIUM I.

18. *Altitudo cylindri ſphæroidi circumſcripti diverſa non eſt ab axe ipſius ſphæroidis.* Axis enim ipſius cylindri eſt axis ipſius ſphæroidis; & altitudo cylindri recti penes illius axim ſumitur (a).

COROLLARIUM II.

19. *Circulus baſeos cylindri ſphæroidi circumſcripti eſt æqualis circulo maximo ipſius ſphæroidis.* Recta namque CM, ex qua rotan-

(a) Lib. XI. §. 39.

rotante producitur circulus baſeos MN cylindri EMNF, adæquat ſemiaxim BF, ex quo circa alterum axim AC revoluto circulus maximus BZD ipſius ſphęroidis producitur (a); ac proinde *diameter circuli baſeos cylindri circumſcripti ſphæroidi latę eſt æqualis majori axi ellipſeos generatricis; diameter vero circuli baſis cylindri circumſcripti ſphæroidi oblongæ axim minorem ejuſdem ellipſis adæquat*.

DEFINITIO VIII.

20. *Similes ſphæroides ſunt illę, quæ ex revolutione ſemiellipſium ſimilium circa homologos axes generantur*. Ut ſi ſemiellipſes ABC, *abc* fuerint ſimiles, & axes AC, *ac*, circa quos revolvuntur, fuerint homologi, ſphæroides inde genitæ ABCD, *abcd* erunt ſibi mutuo ſimiles.

Fig. 13. Fig. 14. T. XVII.

COROLLARIUM.

21. *Similes ſibi mutuo ſunt cylindri ſimilibus ſphęroidibus circumſcripti*. Videlicet inter ſe mutuo ſimiles erunt cylindri EMNF, *emnf* circumſcripti ſphæroidibus ABCD, *abcd*, ſi ipſæ ſphæroides fuerint ſibi mutuo ſimiles. Enimvero, cum propter ſimilitudinem ſemiellipſium ABC, *abc* habeatur AC.PB = *ac*.*pb* (b), ſitque MC = BP, & *mc* = *bp*, erit AC.MC = *ac*.*mc*, videlicet axes cylindrorum erunt proportionales baſium radiis. Eadem eſt autem inclinatio ipſorum axium ad baſes, ut patet. Ergo ipſi cylindri ſunt ſibi mutuo ſimiles (c).

DEFINITIO IX.

22. *Conois parabolicus eſt ſolidum genitum ex revolutione ſemiparabolæ circum axim*. Ut ſi ſemiparabola B*m*AE rotari concipiatur circum axim AE, ſolidum, quod hinc efficitur, B*m*ACM erit conois parabolicus.

Fig. 12. T. XVIII

DEFI-

(a) §. 13. (b) §. 2. (c) Lib. XIII. §. 7.

Digitized by Google

DEFINITIO X.

23. Si rectangulo DBEA inſcripta ſit ſemiparabola B*m*AE, quæ ſimul cum ipſo rectangulo rotetur circum axim AE, cylindrus DBMCF genitus ex revolutione rectanguli DBEA dicitur *circumſcriptus* conoidi parabolico B*m*AE producto ex revolutione ſemiparabolæ B*m*AE.

COROLLARIUM I.

24. *Cum axis conoidis parabolici ſit etiam axis cylindri circumſcripti, altitudo ipſius cylindri diverſa non erit ab axe inſcripti conoidis.*

COROLLARIUM II.

25. *Eadem eſt baſis conoidis parabolici, & cylindri circumſcripti.* Eſt enim circulus genitus ex revolutione ejuſdem ſemiordinatæ ad axim ſemiparabolæ generatricis.

DEFINITIO XI.

26. *Conois hyperbolicus eſt ſolidum productum a ſemihyperbola rotante circa quieſcentem axim.* Hujuſmodi eſt ſolidum Fig. 18. T.XVIII A*a*B*b*C*m*, quod efficitur ex revolutione ſemihyperbolæ A*a*B*e* circa quieſcentem axim B*e*.

LEMMA I.

Si quatuor magnitudines fuerint geometrice proportionales quatuor magnitudinibus geometrice proportionalibus, ipſæ quoque erunt geometrice proportionales.

27. Quatuor magnitudinibus geometrice proportionalibus A, B, C, D ſint proportionales quatuor magnitudines

a, b, c, d, eſto nimirum $a.b = A.B$, & $c.d = C.D$. Dico, eſſe $a.b = c.d$.

Demonſtratio.

Quandoquidem, cum ſit $a.b = A.B$, & $c.d = C.D$, nequit eſſe $A.B = C.D$, quin itidem ſit $a.b = c.d$ (a). Si ergo quatuor magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

LEMMA II.

Si tres magnitudines fuerint geometrice proportionales tribus aliis magnitudinibus continuo arithmetice proportionalibus, ipſæ quoque erunt inter ſe continuo arithmetice proportionales.

28. Tres magnitudines a, b, c ſint geometrice proportionales tribus A, B, C continuo arithmetice proportionalibus, eſto nempe $a.b = A.B$, & $b.c = B.C$, ſitque $A - B = B - C$. Dico, itidem eſſe $a - b = b - c$.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi habetur $a.b = A.B$, & $b.c = B.C$, erit $a - b.b - c = A - B.B - C$ (b). Poſuimus autem $A - B = B - C$. Ergo erit etiam $a - b = b - c$ (c), ac proinde $\div a.b.c$ (d). Itaque ſi tres magnitudines &c. quod erat oſtendendum.

LEM-

(a) Lib. I. §. 74.
(b) Ibidem §. 111.
(c) Ibid. §. 49.
(d) Ibid. §. 192.

Digitized by Google

L E M M A III.

Si inter primam, & ſecundam quatuor magnitudinum geometrice proportionalium, ſicuti etiam inter tertiam, & quartam, ponatur media arithmetice proportionalis, eadem erit ratio tum duarum antecedentium ad illas medias, tum ipſarum mediarum ad conſequentes.

Sint quatuor magnitudines a, b, c, d geometrice proportionales, inter quarum primam a, & ſecundam b ponatur media arithmetice proportionalis E, inter tertiam autem c, & quartam d media arithmetice proportionalis F, ita nimirum ut ſit $\div a . E . b$, & $\div c . F . d$.

I.

29. Dico primo, eſſe $a . E = c . F$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $a . b = c . d$, erit $a+b . a = c+d . c$ (a), atque hinc $a+b . c+d = a . c$ (b). Manifeſtum eſt autem, eſſe $\frac{a+b}{2} . \frac{c+d}{2} = a+b . c+d$ (c). Quamobrem erit etiam $\frac{a+b}{2} . \frac{c+d}{2} = a . c$ (d); atque adeo $\frac{a+b}{2} . a = \frac{c+d}{2} . c$ (e), nec non $a . \frac{a+b}{2} = c . \frac{c+d}{2}$ (f). Eſt autem $\frac{a+b}{2} = E$, & $\frac{c+d}{2} = F$ (g). Igitur erit $a . E = c . F$.

30. Di-

(a) Lib. I. §. 118.
(b) Ibidem §. 125.
(c) Ibidem §. 126.
(d) Ibidem §. 78.
(e) Ibidem §. 125.
(f) Ibidem §. 121.
(g) Ibid. §. 196.

Digitized by Google

II.

30. Dico 2, eſſe E . b = F . d.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Enimvero, cum ex data analogia habeatur $a+b . b = c+d . d$ (a), erit $a+b . c+d = b . d$ (b). Cumque ſit $\frac{a+b}{2} . \frac{c+d}{2} = a+b . c+d$ (c); adeoque $\frac{a+d}{2} . \frac{c+d}{2} = b . d$ (d), erit etiam $\frac{a+b}{2} . b = \frac{c+d}{2} . d$ (e); atque propterea E . b = F . d. Si ergo inter primam &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA I.

Perimeter ellipſis adæquat peripheriam circuli, cujus diameter ſit media arithmetice proportionalis inter illius axes.

31 Circa centrum E ellipſis ABCD deſcribatur circulus *abed*, cujus diameter *bd* ſit media arithmetice proportionalis inter axes AC, BD ipſius ellipſis. Dico, perimetrum ellipſis ABCD æquare peripheriam circuli *abed*.

Fig. 11. T. XVII.

Demonſtratio.

Si uniformiter circa diametrum *bd* contrahatur circulus *abed*, tanto major fit diameter *ae*, quanto minor in illa contractione diameter *bd* efficitur. Æqualia ſunt autem intervalla *b*B, *e*C, D*d*, A*a* (f). Ergo extrema *a*, *e* diametri *ae* con-

(a) Lib. I. §. 138.
(b) Ibidem §. 125.
(c) Ibid. §. 126.
(d) Ibid. §. 71.
(e) Ibid. §. 125.
(f) Lib. I. §. 192.

congruent extremis A, C axis AC, ſeu diameter *ae* æquabit axim AC, cum diameter *bd* adeo in illa contractione decreverit, ut axi BD facta fuerit æqualis. Manifeſtum eſt autem, circulum *abed* per illam contractionem abire in ellipſim, ſicuti quadratum, ſi eodem modo circa diametrum contrahatur, mutatur in rombum; duaſque ellipſes ſibi mutuo omnino congruere, ſeu æquales eſſe inter ſe, ſi axes ipſarum cognomines fuerint æquales. Ergo ellipſis, in quam tranſit circulus *abed*, dum circa diametrum *bd* contrahitur, omnino congruit ellipſi ABCD. Igitur peripheria circuli *abed*, & perimeter ellipſeos ABCD, utpote ſibi mutuo perfecte congruentes, ſunt inter ſe æquales (a). Perimeter ergo ellipſis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

32. Hinc *diameter circuli, cujus peripheria ſit æqualis perimetro ellipſis, erit media arithmetice proportionalis inter axes ipſius ellipſis.*

THEOREMA II.

Peripheria circuli majoris axis ellipſeos eſt ad perimetrum ipſius ellipſis, ut major axis ad mediam arithmetice proportionalem inter axes. Perimeter vero ellipſis eſt ad peripheriam circuli axis minoris, ut media arithmetice proportionalis inter axes ad axim minorem.

I.

33. Circa majorem axim AC ellipſis ABCD deſcribatur circulus AHCK. Dico, peripheriam circuli AHCK eſſe ad perimetrum ellipſis ABCD, ut major axis AC ad rectam *bd* mediam arithmetice proportionalem inter axes AC, BD ipſius ellipſis. Fig. 15. T. XVII.

De-

(a) Lib. V. §. 34.

Demonſtratio.

Circa centrum E deſcribatur circulus *abed*, cujus diameter *bd* ſit ipſa media arithmetice proportionalis inter axes AC, BD. Cum igitur perimeter ellipſeos ABCD adæquet peripheriam circuli *abed* (a), peripheria circuli AHCK erit ad perimetrum ellipſis ABCD, ut ipſa eadem peripheria eſt ad peripheriam circuli *abed* (b). Peripheria autem circuli AHCK eſt ad peripheriam circuli *abed*, ut diameter AC ad diametrum *bd* (c). Ergo peripheria circuli AHCK erit quoque ad perimetrum ellipſis ABCD, ut recta AC ad rectam *bd* (d).

II.

34. Eſto FBGD circulus minoris axis BD ellipſeos ABCD. Dico, perimetrum ellipſis ABCD eſſe ad peripheriam circuli FBGD, ut media *db* arithmetice proportionalis inter axes ad axim minorem BD.

Fig. 15. T.XVII.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Quandoquidem, cum peripheria circuli *abed* adæquet perimetrum ellipſis ABCD (e), eadem erit ratio utriuſque curvæ ad peripheriam circuli FBGD (f). Peripheria autem circuli *abed* eſt ad peripheriam circuli FBGD, ut recta *bd* ad rectam BD (g). Ergo perimeter quoque ellipſis ABCD eſt ad peripheriam circuli FBGD, ut recta *bd* ad rectam BD (h). Peripheria itaque circuli &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

35. Etiam ſemiperipheria circuli majoris axis AC erit tam ad

(a) §. 31.
(b) Lib. I. §. 102.
(c) Lib. IX. §. 155.
(d) Lib. I. §. 77.
(e) §. 31.
(f) Lib. I. §. 102.
(g) Lib. IX. §. 155.
(h) Lib. I. §. 77.

Digitized by Google

ad ſemiperimetrum ellipticum ABC, quam ad ſemiperimetrum ellipticum DAB, ut major axis AC ad mediam arithmeticeproportionalem *a d*. Similiter tam ſemiperimeter ellipticus ABC, quam ſemiperimeter DAB erit ad ſemiperipheriam c irculi minoris axis BD, ut media arithmetice proportionalis *bd* ad axim minorem BD (a).

COROLLARIUM II.

Perimeter ellipſis eſt media arithmetice proportionalis inter peripherias circulorum, qui ſunt circa axes ipſius ellipſis deſcripti.

36. Perimeter nimirum ellipſis ABCD erit media arithmetice proportionalis inter peripherias circulorum AHCK, FBGD. Cum enim ſit AHCK. ABCD = AC. *bd*, & ABCD. FBGD = *db*. BD. (b), ſicuti eſt ∺ AC. *be*. BD per hypotheſim, ita erit ∺ AHCK. ABCD. FBGD (c).

COROLLARIUM III.

37. Hinc etiam ſemiperimeter ellipticus ABC, vel DAB erit medius arithmetice proportionalis inter ſemiperipherias circulorum AHCK, FBGD (d).

COROLLARIUM IV.

38. Si ellipſes ABCD, *abcd* fuerint ſimiles, peripheria circuli AGCH majoris axis AC erit ad perimetrum ellipſis ABCD, ut peripheria circuli *agch* axis homologi *ac* ad perimetrum ellipſis *abcd*. Perimeter quoque ellipſis ABCD erit ad peripheriam circuli EBFD axis minoris BD ut perimeter ellipſis *abcd* ad peripheriam circuli *ebfd* minoris itidem axis *bd*. Poſita namque media XZ arithmetice proportionali inter axes AC, BD, & media *xz* arithmetice proportionali in- Fig. 5. Fig. 6. T. XVII.

(a) Lib. I. §. 126.
(b) Lib. IX. §. 155.
(c) §. 28.
(d) Lib. I. §. 126.

inter axes *ac*, *bd*, cum ſit AC. XZ = *ac*. *xz* (a) & XZ. BD = *xz*. *bd* (b), ex eo nimirum quod ſit AC. BD = *ac*. *bd* (c), quatuor itidem curvæ AGCH, ABCD, *agch*, *abcd*, ſicuti etiam ABCD, EBFD, *abcd*, *ebfd*, erunt geometrice inter ſe proportionales (d).

COROLLARIUM V.

39. Hinc *alternando* perimeter ellipſis ABCD erit ad perimetrum ellipſis *abcd*, tam ut peripheria circuli AGCH ad peripheriam circuli *agch*, quam ut peripheria circuli EBFD ad peripheriam circuli *ebfd* (e) videlicet *perimetri ellipſium ſimilium ſunt directe inter ſe, ut peripheriæ circulorum axium homologorum*.

PROBLEMA I.

Perimetrum ellipſeos dimetiri.

40. Determinare oporteat valorem perimetri elliptici ABCD.

Reſolutio.

Fig. 15. T.XVII. Deſcriptis circulis AHCK, FBGD circa axes AC, BD datæ ellipſis ABCD, inveniatur valor peripherię utriuſque (f), atque horum valorum ſumma biſariam dividatur. Quotus, ſive una pars dimidia hujus ſummæ, erit valor perimetri elliptici ABCD. Poſita nimirum peripheria circuli AHCK = a, & peripheria circuli FBGD = b, perimeter ellipſeos ABCD erit $= \frac{a+b}{2}$.

De-

(a) §. 29.
(b) §. 30.
(c) §. 1.
(d) §. 27.
(e) Lib. I. §. 125.
(f) Lib. X. §. 34.

Demonſtratio.

Quantitas enim $\frac{a+b}{2}$ eſt media arithmetice proportionalis inter magnitudines *a*, *b* (a). ac proinde valor perimetri elliptici ABCD (b).

S C H O L I O N.

41. Dimensio propterea perimetri ellipſeos dependet a dimenſione peripheriæ circuli.

HYPOTHESIS I.

42. Juxta methodum *indiviſibilium* alibi explicatam ellipſis, & circulus hic conſiderantur veluti plana compoſita ex tot rectis ordinatis ad axim, adeoque inter ſe parallelis, quot puncta, verticibus neglectis, in ipſo axe numerantur.

L E M M A IV.

Omnia elementa circuli deſcripti circa majorem axim ellipſeos habent eandem rationem ad elementa ſibi correſpondentia in ellipſi inſcripta. Elementa quoque ellipſis habent omnia eandem rationem ad elementa, quæ ſibi correſpondent in circulo deſcripto circa axim minorem.

I.

43. Circa majorem axim AC ellipſis ABCD deſcriptus habeatur circulus A*eCf*, duoque in his planis ſpectentur elementa, videlicet *ef*, *ab* in circulo, quibus correſpondeant duo BD, GH in ellipſi. Dico, eſſe *ef*. BD = *ab*. GH. Fig. 11. T. XVII.

(a) Lib. I. §. 196.
(b) §. 36.

Demonſtratio.

Eadem enim eſt ratio omnium ordinatarum ad axim in circulo ad ordinatas ad axim ſibi correſpondentes in ellipſi (a).

II.

44. Circa minorem axim AC ellipſis ABCD deſcriptus ſit
Fig. 12. T.XVII. circulus *AeCf*, atque in his ſumantur duo quæcunque elementa, nempe BD, GH in ellipſi, & duo *e f*, *ab* illis correſpondentia in circulo. Dico, itidem eſſe BD . *ef* = GH . *ab*.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti. Omnia itaque elementa &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA III.

Circulus majoris axis ellipſeos eſt ad ipſam ellipſim, & ellipſis ad circulum axis minoris, ut major axis ad axim minorem.

I.

45. Circulus *AeCf* ſit deſcriptus circa majorem axim AC
Fig. 11. T.XVII. ellipſis ABCD. Dico, circulum *AeCf* eſſe ad ellipſim ABCD, ut major axis AC ad minorem BD.

Demonſtratio.

Quoniam eadem eſt ratio omnium elementorum circuli *AeCf* ad elementa ellipſeos ABCD ſibi reſpondentia (b), ſumma omnium elementorum circuli *AeCf* erit ad ſummam omnium elementorum ellipſis ABCD, nempe circulus *AeCf* erit ad ellipſim ABCD, ut unum antecedentium *ef* ad unum con-

(a) Lib. XV. §. 59. (b) §. 43.

Digitized by Google

conſequentium BD (a). Eſt autem AC = *ef* (b). Ergo circulus *AeCf* erit ad ellipſim ABCD, ut major axis AC ad minorem BD.

I I.

46 Circa minorem axim AC ellipſis ABCD deſcriptus ſit circulus *AeCf*. Dico, ellipſim ABCD eſſe ad circulum *AeCf*, ut axis major BD ad minorem AC. Fig. 12. T. XVII.

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti Quandoquidem etiam in hoc caſu omnia elementa ellipſeos ABCD ſimul ſumta ſunt ad ſummam omnium elementorum inſcripti circuli *AeCf*, ut unum antecedentium BD ad unum conſequentium *ef* (c); eſtque AC = *ef* (d). Circulus itaque &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

47. Ducta ordinata quacunque *ab*, ſegmentum ellipticum GAH erit ad ſegmentum circulare ſibi correſpondens *aAb*, ut eſt tota ellipſis *ABCD* ad totum circulum *AeCf*. Summa enim omnium elementorum ſegmenti elliptici GAH eſt ad ſummam omnium elementorum ſegmenti circularis *aAb*, ut unum GH ad unum *ab* (e), adeoque ut *BD* ad *ef* (f), ſeu ut ellipſis *ABCD* ad circulum circumſcriptum, vel inſcriptum *AeCf*. Fig. 11. Fig. 12. T. XVII.

COROLLARIUM II.

48 Hinc alternando, ſegmentum ellipticum GAH erit ad totam ellipſim *ABCD*, ut eſt ſegmentum circulare *aAb* ad totum circulum *AeCf* (g).

(a) Lib. I. §. 144.
(b) Lib. VII. §. 11.
(c) Lib. I. §. 144.
(d) Lib. VII. §. 11.
(e) Lib. I. §. 144.
(f) Lib. XV. §. 56.
(g) Lib. I. §. 125.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

49. Semicirculus quoque *AeC* erit ad ſemiellipſim *ABC*, ſicuti etiam ſemicirculus *fAe* ad ſemiellipſim *DAB* ut axis major *AC* ad minorem *BD*. Similiter ſemiellipſis *ABC* erit ad ſemicirculum *AeC*, & ſemiellipſis *DAB* ad ſemicirculum *fAe*, ut major axis *BD* ad minorem *AC* (a).

Fig 11. Fig 12. T. XVII.

COROLLARIUM IV.

Ellipſis eſt media geometrice proportionalis inter circulos axium.

50. Deſcriptis nimirum circa axes *AC*, *BD* ellipſis *ABCD* circulis *AGCH*, *EBFD*, ellipſis *ABCD* erit media geometrice proportionalis inter ipſos circulos. Eſt enim tam circulus *AGCH* ad ellipſim *ABCD*, quam ipſa ellipſis ad circulum *EBFD*, ut major axis AC ad minorem *BD* (b).

Fig. 5. T. XVII.

COROLLARIUM V.

51. Hinc etiam ſemiellipſis eſt media geometrice proportionalis inter ſemicirculos axium (c).

SCHOLION.

52. Vides ergo, continuam eſſe proportionem inter tria hujuſmodi plana, æque ac inter curvas, quibus continentur, ſed in diverſo genere. Nam inter illa habetur proportio Geometrica (d), inter has vero proportio Arithmetica reperitur (e).

COROLLARIUM VI.

53. Si ellipſes *ABCD*, *abcd* fuerint ſimiles, circulus majoris axis *AGCH* erit ad ellipſim *ABCD*, ut circulus majoris axis *agch* ad ellipſim *abcd*. Ellipſis quoque *ABCD* erit ad circulum axis minoris *EBFD*, ut eſt ellipſis *abcd* ad circulum minoris axis *ebfd*. Hac enim facta hypotheſi, habetur AC . BD = *ac* . *bd* (f).

Fig. 5. Fig. 6. T. XVII.

CO-

(a) Lib I. §. 126.
(b) §§. 45. 46.
(c) Lib. I. §. 126.
(d) §. 50.
(e) §. 36.
(f) §. 1.

Digitized by Google

COROLLARIUM VII.

54. Quamobrem *alternando*, ellipſis *ABCD* eſt ad ellipſim *abcd*, tam ut circulus *AGCH* ad circulum *agch*, quam ut circulus *EBFD* ad circulum *ebfd* (a), ut proinde *ellipſes ſimiles ſint directe inter ſe, ut circuli axium homologorum*.

SCHOLION.

55. Patet idcirco, areas harum figurarum reſpondere curvis, quibus terminantur. Ut enim areę, ita etiam ipſæ curvæ, ſi eodem modo inter ſe conferantur, ſunt geometrice proportionales (b).

COROLLARIUM VIII.

56. Poſita ſimilitudine ellipſium *ABCD*, *abcd*, circulus quoque *AGCH* erit ad ellipſim *ABCD* ſibi inſcriptam, ut eſt ellipſis *abcd* ad inſcriptum ſibi circulum *ebfd*; ac proinde etiam ſemicirculus majoris axis *AC* ellipſis *ABCD* erit ad ſemiellipſim tam *ABC*, quam *DAB*, ut eſt tam ſemiellipſis *abc*, quam ſemiellipſis *dab* ad ſemicirculum axis minoris *bd*. Manifeſtum namque eſt, circulum *AGCH* eſſe ad ellipſim *ABCD*, ut major axis *AC* ad minorem *BD*, & ellipſim *abcd* eſſe ad circulum *ebfd*, ut major itidem axis *ac* ad minorem *bd* (c) quæ axium rationes ſunt inter ſe æquales (d).

THEOREMA IV.

Ellipſis adæquat circulum, cujus diameter ſit media geometrice proportionalis inter ipſius axes.

57. Diameter PQ circuli VPXQ ſit media geometrice proportionalis inter axes *AC*, *BD* ellipſis *ABCD*. Dico, ellipſim *ABCD* æquare circulum VPXQ.

De-

(a) Lib. I. §. 125. (b) §. 38. (c) §. 45. (d) § 1.

Demonſtratio.

Fig. 5. Fig. 8. T.XVII. Circa majorem axim AC deſcriptus habeatur circulus AGCH. Quoniam igitur tres rectæ AC, PQ, BD ſunt continuo geometrice proportionales, circulus AGCH erit ad ad circulum VPXQ, ut prima AC ad tertiam BD (a), nempe ut axis major ipſius ellipſis ad minorem. Circulus autem AGCH eſt itidem ad ellipſim ABCD, ut major axis AC ad minorem BD (b). Ergo ellipſis ABCD eſt æqualis circulo VPXQ (c). Itaque ellipſis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

58. Hinc *diameter circuli, cujus area adæquet aream ellipſis, erit media geometrice proportionalis inter axes ipſius ellipſis.*

COROLLARIUM II.

Rectangulum axium ellipſis eſt ad ipſam ellipſim, ut eſt quadratum, cujus latus ſit media geometrice proportionalis inter ipſos axes ad circulum ſibi inſcriptum.

59. Ut ſi latus RT quadrati VT fuerit media geometrice proportionalis inter axes AC, BD ellipſis ABCD, rectangulum PM ex axibus ipſius ellipſis erit ad ſibi inſcriptam ellipſim ABCD, ut eſt quadratum VT ad inſcriptum ſibi circulum VX. Cum enim propter hypotheſim rectangulum PM ſit æquale quadrato VT (d), & ellipſis ABCD circulo VX (e), erit rectangulum PM ad ellipſim ABCD, ut quadratum VT ad circulum VX.

CO-

(a) Lib. IX. §. 189.
(b) §. 45.
(c) Lib. I. §. 103.
(d) Lib. IX. §. 111.
(e) §. 57.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

Rectangulum ex axibus ellipſis eſt proxime ad ipſam ellipſim, ut 1000 *ad* 785.

60. Hæc enim eſt ratio quadrati ad circulum ſibi inſcriptum (a).

SCHOLION.

61. Quoniam vero ex Archimede quadratum eſt ad inſcriptum ſibi circulum, ut 14 ad 11, etiam rectangulum ex axibus ellipſis erit ad ipſam ellipſim juxta Archimedæum calculum, ut 14 ad 11.

PROBLEMA II.

Aream ellipſeos dimetri.

62. Eſto ellipſis ABCD, cujus aream dimetiri opporteat.

Reſolutio I.

Determinetur valor circuli tam majoris axis AC, quam minoris BD (b); tum inter ipſos valores quantitas media geometrice proportionalis inveniatur (c). Hæc enim erit valor areæ ellipticæ ABCD quæſitus. Ut ſi area circuli AGCH majoris axis fuerit $= ab$, & area circuli EBFD axis minoris fuerit $= de$, area ellipſis ABCD erit $= \sqrt{abde}$. Fig. 5. T. XVII.

Demonſtratio.

Patet ex §. 50. hujus, & ex §. 91. *lib. I.*

Reſo-

(a) Lib. X. §. 50.
(b) Ibid. §. 52.
(c) Lib. I. §. 91.

Reſolutio II.

Inveniatur valor rectanguli PM, quod fit ex axibus ipſius ellipſis (a). Tum fiat, ut 1000 ad 785, vel ut 14 ad 11, ita valor rectanguli inventus ad quartum terminum geometrice proportionalem (b). Is namque erit valor areæ ellipticæ ABCD. Ut ſi valor rectanguli PM fuerit $= de$, area ellipſis ABCD erit $= \frac{785de}{1000}$, vel $\frac{11de}{14}$.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex §. 60.

S C H O L I O N.

63. Perſpicuum eſt, quadraturam ellipſis a quadratura circuli dependere.

THEOREMA V.

Perimetri ellipſium ſimilium ſunt directe inter ſe, ut ipſarum axes homologi.

64. Sint duæ ellipſes ſimiles ABCD, *abcd*, quarum axes
Fig. 5. Fig. 6. T.XVII. majores ſint AC, *ac*, & minores BD, *bd*. Dico, perimetrum ellipſis ABCD eſſe ad perimetrum ellipſis *abcd*, ut eſt axis BD ad axim *bd*.

Demonſtratio.

Deſcriptis enim circulis EBFD, *ebfd* circa homologos axes BD, *bd*, conſtat, perimetrum ellipſis ABCD eſſe ad peri-

(a) Lib. X. §. 21. (b) Lib. I. §. 87.

Digitized by Google

rimetrum ellipſis *abcd*, ut eſt peripheria circuli EBFD ad peripheriam circuli *ebfd* (a). Peripheria autem circuli EBFD eſt ad peripheriam circuli *ebfd*, ut recta BD ad rectam *bd* (b). Ergo perimeter quoque ellipſis ABCD erit ad perimetrum ellipſis *abcd*, ut eſt axis BD ad axim *bd* (c). Itaque perimetri &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Perimeter ellipſium ſimilium ſunt directe inter ſe, ut ſemiaxes ipſarum homologi.

65. Ratio enim ſemiaxium diverſa non eſt a ratione axium (d).

COROLLARIUM II.

Semiperimetri, & omnes arcus ſimiles perimetrorum ellipſium ſimilium, ſunt inter ſe, ut homologi earum axes, & ſemiaxes.

66. Enimvero ſemiperimetri ellipſium ſimilium, ſicuti etiam arcus ſimiles, ſunt *directe* inter ſe, ut ipſi perimetri (e).

THEOREMA VI.

Ellipſes ſunt directe inter ſe, ut axium rectangula.

67. Ex axibus AC, BD ellipſis ABCD fiat rectangulum PM, & ex axibus *ac*, *bd* ellipſis *abcd* rectangulum *pm*. Dico, ellipſim ABCD eſſe ad ellipſim *abcd*, ut eſt rectangulum PM ad rectangulum *pm*.

(a) §. 39.
(b) Lib. IX. §. 155.
(c) Lib. I. §. 77.
(d) Ibid. §. 126.
(e) Ibidem.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Cum enim tam ellipſis ABCD ſit ad rectangulum PM,
Fig. 5. quam ellipſis *abcd* ad rectangulum *pm*, ut 785 ad 1000 (a),
Fig. 6. ellipſis ABCD erit ad rectangulum PM, ut ellipſis *abcd* ad
T. XVII. rectangulum *pm* (b). Ergo ellipſis ABCD erit quoque ad ellipſim *abcd*, ut rectangulum PM ad rectangulum *pm* (c). Ellipſis itaque &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Ellipſes ſunt in ratione compoſita ſuorum axium.

68. Hoc enim modo ſe habent rectangula, quæ fiunt ex axibus (d).

COROLLARIUM II.

Ellipſes, quarum axes reciprocantur, ſunt æquales.

69. Æquales nimirum erunt ellipſes ABCD, *abcd*, ſi major axis AC fuerit ad majorem *ac*, *reciproce* ut minor *bd* ad minorem BD. Tunc enim æqualia ſunt rectangula PM, *pm* ipſis ellipſibus circumſcripta (e).

COROLLARIUM III.

Ellipſes, quarum axes majores ſunt æquales, ſunt directe inter ſe, ut minores; & viciſſim, ut majores, ſi minores ſint æquales.

70. Enimvero hoc modo ſe habent rectangula axium (f).

THEO-

(a) §. 60.
(b) Lib. I. §. 76.
(c) Ibid §. 125.
(d) Lib. IX §. 105.
(e) Ibidem §. 100.
(f) Ibid. §§. 95. 100.

Digitized by Google

THEOREMA VII.

Ellipſes ſimiles ſunt in ratione duplicata ſuorum axium homologorum.

71. Sint duæ ellipſes ſimiles ABCD, *abcd*, quarum axes homologi ſint AC, *ac*. Dico, ellipſim ABCD eſſe ad ellipſim *abcd* in ratione *duplicata* axis AC ad axim *ac*.

Demonſtratio I.

Deſcriptis enim circulis AGCH, *agch*, ellipſis ABCD eſt ad ellipſim *abcd*, ut eſt circulus AGCH ad circulum *agch* (a). Circulus autem AGCH eſt ad circulum *agch* in ratione *duplicata* diametri, ſive axis AC ad diametrum, ſeu axim *ac* (b). Ergo in eadem quoque ratione ſunt ellipſes. Eodem modo demonſtrabitur, ellipſes ABCD, *abcd* eſſe in ratione *duplicata* axium BD, *bd*. Fig. 5. Fig. 6. T.XVII.

Demonſtratio II.

Ellipſis ABCD eſt ad ellipſim *abcd* in ratione compoſita ex ratione axis AC ad axim *ac*, & ex ratione axis BD ad axim *bd* (c). Eſt autem AC.*ac* = BD.*bd* (d). Ergo ratio ellipſis ABCD ad ellipſim *abcd* eſt *duplicata* ratione axium homologorum (e). Itaque ellipſes &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Ellipſes ſimiles ſunt in ratione duplicata ſuorum ſemiaxium homologorum.

72. Ratio enim ſemiaxium diverſa non eſt a ratione axium (f).

(a) §. 54.
(b) Lib. IX. §. 186.
(c) §. 68.
(d) §. 1.
(e) Lib. I. §. 55.
(f) Ibidem §. 126.

COROLLARIUM II.

Semiellipſes ſimiles, ſimileſque ſectores ellipſium ſimilium ſunt reſpective inter ſe in ratione duplicata ſuorum axium, & ſemiaxium homologorum.

73. Similes namque ſemiellipſes, ſicuti etiam ſectores ſimiles ellipſium ſimilium, cum ſint partes ipſarum ſimiles, ſunt *directe* inter ſe, ut ipſæ integræ ellipſes (a).

COROLLARIUM III.

Tam ellipſes, quam ſemiellipſes ſimiles, earumque ſimiles ſectores ſunt reſpective inter ſe, ut quadrata ſuorum axium, & ſemiaxium homologorum.

74. Etenim conſtat, quadrata eſſe inter ſe in ratione *duplicata* ſuorum laterum (b).

COROLLARIUM IV.

Si prima, & ſecunda trium rectarum continuo geometrice proportionalium fuerint axes, aut ſemiaxes homologi ellipſium ſimilium, ellipſis primæ erit ad ellipſim ſecundæ, ut eſt illarum prima ad tertiam.

75. Manifeſtum ſiquidem eſt, primam trium rectarum continuo geometrice proportionalium eſſe ad tertiam in ratione *duplicata* primæ ad ſecundam (c).

CO-

(a) Lib. I. §. 126.
(b) Lib. IX. § 172.
(c) Lib. I. § 177.

Digitized by Google

COROLLARIUM V.

Si tria latera trianguli rectanguli fuerint axes homologi ellipſium ſimilium, ellipſis hypotenuſæ erit æqualis ellipſibus laterum ſimul ſumtis.

76. Oſtenditur ex §. 74. eodem penitus modo, quo *lib. IX.* §. 191. idipſum de circulis demonſtravimus.

COROLLARIUM VI.

77. *Tam axes, quam ſemiaxes homologi ellipſium ſimilium ſunt in ratione ipſarum ſubduplicata* (a).

HYPOTHESIS II.

78. Cum ſphærois quæcumque oriatur ex completa revolutione ſemiellipſis, & ſphæra ex completa revolutione ſemicirculi circa quieſcentem axim, quemadmodum area tum ſemiellipſis, tum ſemicirculi ſpectatur veluti compoſita ex tot rectis ſemiordinatis ad axim, quot puncta, neglectis extremis, in ipſo axe numerantur (b), ita tum ſphærois, tum ſphæra aſſumi poteſt, veluti ſolidum conſurgens ex tot circulis ſibi mutuo ſuperimpoſitis, inter ſe parallelis, centrum habentibus in axe, atque verſus vertices continuo hinc inde a centro decreſcentibus, quot ſunt puncta in ipſo eodem axe, extremis itidem non computatis. *Fig. 7.* Perſpicuum ſiquidem eſt, in revolutione ſemiellipſis ABC, *T. XVII.* ſicuti etiam ſemicirculi A*m*C, circa quieſcentem axim AC, unde emergunt ſphærois ABCD, & ſphæra A*m*C*n*, quamlibet rectam *m*E, *b*G ſemiordinatam ad ipſum axim, circulum deſcribere.

LEM-

(a) Lib. I. §. 53. (b) §. 42.

LEMMA V.

Elementa ſphæroidis tam oblongæ, quam latæ habent omnia eandem rationem ad elementa ſibi correſpondentia in ſphæra ex revolutione ſemicirculi circa eundem axim producta.

I.

79. Circa majorem axim AC ſimul revolvantur ſemiellipſis ABC, & ſemicirculus AmC, duoque fiant ſolida, ſphæra nempe AmCn, & ſphærois oblonga ABCD illi inſcripta, atque in his ſumantur duo quæcunque elementa, videlicet elementa, ſeu circuli *mxn*, *bad* in ſphæra, quibus in ſphæroide reſpondeant elementa, ſive circuli BeD, LaF. Dico, rationem elementi *mxn* ſphæræ ad elementum BeD ſphæroidis diverſam non eſſe ab ea, quam habet elementum *bad* ad elementum LaF.

Fig. 7. T. XVII.

Demonſtratio.

Secto utroque ſolido AmCn, ABCD plano per axim AC, ſit AmCn ſectio ſphæræ, adeoque circulus (a), & ABCD ſectio ſphæroidis; ac proinde ellipſis (b). Rectæ igitur *mn*, BD, *bd*, LF erunt illorum elementarium circulorum diametri. Eſt autem *mn*. BD = *bd*. LF (c). Ergo harum quoque rectarum quadrata erunt inter ſe proportionalia (d), videlicet quadratum rectæ *mn* erit ad quadratum rectæ BD, ut eſt quadratum rectæ *bd* ad quadratum rectæ LF. Circuli autem *mxn*, BeD ſunt, ut quadrata rectarum *mn*, BD, & circuli *bad*, LaF, ut quadrata rectarum *bd*, LF (e). Ergo circulus quoque *mxn* erit ad circulum BeD, ut circulus *bad* ad circulum LaF (f).

80. Sphæ-

(a) Lib. XII. §. 38.
(b) §. 10.
(c) §. 43.
(d) Lib. I. §. 188.
(e) Lib. IX. §. 188.
(f) Lib. I. §. 76.

Digitized by Google

II.

80. Sphæroidi latæ ABCD productæ ex revolutione ſemiellipſis ABC circa minorem axim AC inſcripta ſit ſphæra AmCn genita ex revolutione ſemicirculi AmC circa eundem axim. In hiſce autem ſolidis ſumantur duo quæcunque elementa, nempe BxD, LaF in ſphæroide, quibus reſpondeant elementa *men*, *bad* in ſphæra. Dico, elementum BxD eſſe ad elementum *men*, ut elementum LaF ad elementum *bad*. Fig. 9. T. XVII.

Demonſtratio.

Eadem omnino eſt cum præcedenti. Etenim elementa utriuſque ſolidi ſunt circuli (a); eſtque BD . *mn* = LF . *bd* (b). Itaque elementa ſphæroidis &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VIII.

Sphæra majoris axis ellipſeos eſt ad ſphæroidem oblongam ſibi inſcriptam, & ſphærois lata ad inſcriptam ſibi ſphæram minoris axis, ut circulus axis majoris ad circulum axis minoris ellipſeos generatricis.

I.

81. Eſto ſphæra AmCn majoris axis AC ellipſis ABCD, cui inſcripta ſit ſphærois oblonga ABCD genita ex revolutione ſemiellipſis ABC circa ipſum axim AC. Dico, ſphæram AmCn eſſe ad ſphæroidem oblongam ABCD, ut eſt circulus majoris axis AC ad circulum axis minoris BD. Fig. 7. T. XVII.

De-

(a) § 71. (b) § 44.

Digitized by Google

Demonſtratio.

In ſphæra *AmCn* ſpectetur elementum, ſive circulus *mxn* productus ex revolutione ſemiordinatæ, ſive radii *Em* ſemicirculi genitoris *AmC*, & in ſphæroide elementum, ſeu circulus *BeD* circulo *mxn* correſpondens, productus ex revolutione ſemiordinatæ *EB*. Igitur, cum eadem ſit ratio omnium elementorum ſphæræ *AmCn* ad omnia elementa ſphæroidis ABCD ſibi correſpondentia (a), ſumma omnium elementorum ſphæræ *AmCn* erit ad ſummam omnium elementorum ſphæroidis ABCD, ſeu ſphæra erit ad ſphæroidem, ut unum antecedentium ad unum conſequentium (b), nempe ut circulus *mxn* ad circulum *BeD*. Circulus autem *BeD* eſt circulus minoris axis BD, & circulus *mxn* adæquat circulum axis majoris AC; cum ſit *mn* = AC. Ergo ſphæra *AmCn* erit ad ſphæroidem ABCD, ut eſt circulus majoris axis AC ad circulum minoris BD.

II.

82. Sphæroidi latæ ABCD genitæ ex revolutione ſemiellipſis ABC circa minorem axim AC inſcripta habeatur ſphæra *AmCn* ipſius axis minoris. Dico, ſphæroidem ABCD eſſe ad ſphæram *AmCn*, ut circulus majoris axis BD ad circulum axis minoris AC.

Fig. 9. T. XVII.

Demonſtratio.

Oſtenditur eodem modo, quo præcedens. Etenim propter identitatem rationis omnium elementorum ſphæroidis ABCD ad elementa ſphæræ *AmCn* (c), ſphærois ABCD erit ad ſphæram *AmCn*, ut unum antecedentium *BxD* ad unum conſequentium *men*, ſeu ut circulus majoris axis *BD* ad circulum axis minoris AC. Itaque ſphęra &c. quod erat &c.

COROL-

(a) §. 79. (b) Lib. I. §. 144. (c) §. 80.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

83. *Sphæra majoris axis ellipſeos, & ſphærois oblonga illi inſcripta, ſicuti etiam ſphærois lata, & ſphæra axis minoris illi itidem inſcripta, ſunt directe inter ſe, ut maximi ipſarum circuli.* Sunt enim, ut circuli, qui per illarum centrum tranſeunt.

COROLLARIUM II.

84. Segmentum ſphæroidale LAF eſt ad ſegmentum ſphęricum *b*A*d* eodem plano ſecante determinatum, ut ſphærois ABCD ad ſphæram A*m*C*n*. Summa enim elementorum unius eſt ad ſummam elementorum alterius, ut unum antecedentium ad unum conſequentium; adeoque, ut circulus B*e*D ad circulum *m x n*, ſeu ut ſphærois ABCD ad ſphęram A*m*C*n*.

COROLLARIUM III.

85. Quamobrem *alternando*, ſegmentum ſphæroidale LAF eſt ad totam ſphæroidem ABCD, ut ſegmentum ſphæricum *b*A*d* ad totam ſphæram A*m*C*n* (a).

COROLLARIUM IV.

86. Sphæra A*m*C*n* majoris axis AC ellipſis generatricis eſt ad ſphæroidem oblongam ABCD ſibi inſcriptam, & ſphærois lata ABCD ad inſcriptam ſibi ſphæram A*m*C*n* minoris axis AC, ut eſt quadratum axis majoris ad quadratum axis minoris. Quadrata enim axium ſunt *directe* inter ſe, ut eorundem circuli (b).

(a) Lib. I. §. 125. (b) Lib. IX. §. 188.

COROLLARIUM V.

87. Sphæra *AmCn* majoris axis AC ellipſis generatricis eſt ad ſphæroidem oblongam *ABCD*, & ſphærois lata *ABCD* ad ſphæram *AnCn* minoris axis AC in ratione *duplicata* majoris axis ad minorem. Hæc enim eſt ratio, quam habent inter ſe quadrata ipſorum axium (a).

SCHOLION.

88. Hęc proportio evincitur etiam ex ipſorum ſolidorum geneſi. Cum enim ſphæra *AmCn* producatur ex revolutione ſemicirculi *AmC* circa axim AC, quam metitur peripheria circuli *mxn* in ipſa ſphæra maximi (b), & ſphærois *ABCD* fiat ex revolutione ſemiellipſis *ABC* circa eundem axim, cujus revolutionis menſura eſt peripheria circuli *BeD* in ipſa ſphęroide itidem maximi (c), ſphæra *AmCn* erit ad ſphæroidem *ABCD*, ut ſe habet productum, quod fit ex multiplicatione primæ quatuor magnitudinum per ſecundam, ad productum, quod ex multiplicatione tertiæ earundem per quartam efficitur, adeoque in ratione compoſita ex ratione ſemicirculi AmC ad ſemiellipſim ABC, & ex ratione peripheriæ circuli *mxn* ad peripheriam circuli *BeD* (d). Ratio autem ſemicirculi AmC ad ſemiellipſim *ABC* diverſa non eſt a ratione peripheriæ circuli *mxn* ad peripheriam circuli *BeD*; cum utraque adæquet rationem axis AC ad axim BD (e). Ergo ſphæra AmCn eſt ad ſphæroidem ABCD in ratione compoſita ex ratione axis AC ad axim BD ſemel ducta in ſeipſam. Hæc autem eſt ratio ipſorum axium *duplicata* (f). Ergo &c.

CO-

(a) Lib IX § 172
(b) Lib. XI §. 50.
(c) §. 16.
(d) Lib. I. §. 169.
(e) §. 55. Lib. IX. §. 155.
(f) Lib. I. §. 49.

COROLLARIUM VI.

89. Hinc, ſi linea Z fuerit tertia proportionalis poſt majorem axim AC, & minorem BD, ſphæra majoris axis AC erit ad ſphæroidem oblongam ABCD, ut major axis AC ad tertiam proportionalem Z. Similiter poſita tertia proportionali *z* poſt majorem axim MN, & minorem AD, ſphæroi s lata AMDN erit ad inſcriptam ſibi ſphæram A*d*D*b* minoris axis AD, ut major axis MN ad tertiam *z*. Conſtat enim, primam trium magnitudinum continuo geometrice proportionalium eſſe ad tertiam in ratione *duplicata* primæ ad ſecundam (a). Fig. 7. Fig. 10. T. XVII.

COROLLARIUM VII.

90. Si ellipſes ABCD, *abcd*, ex quarum revolutione circa majorem axim fiunt ſphæroides oblongæ ABCD, *abcd*, fuerint ſimiles, ſphæra majoris axis AGCH circumſcripta ſphæroidi oblongæ ABCD erit ad ipſam ſphæroidem ABCD, ut ſphæra majoris axis *agch* ad ſphæroidem oblongam ſibi inſcriptam *abcd*. Etenim, cum propter hypotheſim axes ellipſium ſint proportionales, videlicet ſit AC . BD = *ac* . *bd* (b), eorum itidem quadrata erunt proportionalia (c). Quamobrem etiam quatuor illa ſolida erunt proportionalia (d). Eodem modo demonſtrabitur, ſphæroidem latam ABCD eſſe ad inſcriptam ſibi ſphæram A*m*C*n*, ut eſt ſphærois lata AMDN ad ſphæram ſibi inſcriptam A*d*D*b*, ſi ſimiles pariter fuerint ellipſes generatrices ABCD, AMDN. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 9. Fig. 10. T. XVII

SCHOLION.

91. Quemadmodum ergo plana generantia AGC, ABC, *agc*, *abc* ſunt geometrice proportionalia (e), ſicuti etiam plana ABC, A*m*C, AMD, A*d*D (f), ita ſibi mutuo quo-

que

(a) Ibidem §. 177
(b) § 1.
(c) Lib. I. §. 178.
(d) § 87.
(e) §. 56.
(f) §. Ibid.

Digitized by Google

que proportionalia ſunt ſolida, quæ ex illis rotantibus producuntur, & ea quidem lege, ut ratio ſolidorum genitorum ſit *duplicata* ratione planorum generantium. Quippe plana ſunt, ut axes (a), ſolida vero, ut quadrata ipſorum axium (b).

COROLLARIUM VIII.

92. Hinc ſphæroides oblongæ ABCD, *abcd* genitæ ex revolutione ſemiellipſum ſimilium ABC, *abc*, ſunt directe inter ſe, ut ſphæræ AGCH, *agch* majorum axium. Sphæroides vero latæ ABCD, AMDN ex revolutione ſimilium ſemiellipſium ABC, AMD itidem productæ, ſunt, ut ſphęræ minorum axium A*m*C*n*, A*d*D*b* (c). Quamobrem, cum ex revolutione ſemiellipſium ſimilium fiant ſphæroides ſimiles (d), remanet, *ſphæroides oblongas ſibi mutuo ſimiles eſſe directe inter ſe, ut ſphæræ majorum axium, ſphæroides vero latas ſibi mutuo itidem ſimiles eſſe, ut ſphæræ axium minorum.*

COROLLARIUM IX.

93. Facta eadem hypotheſi ellipſium ſimilium ABCD, AMDN, ſphæra majoris axis A*m*C*n* eſt ad ſphęroidem ob-
Fig. 7. Fig. 10. T.XVII. longam ſibi inſcriptam ABCD, ut eſt ſphærois lata AMDN ad inſcriptam ſibi ſphæram minoris axis A*d*D*b*; Cum enim etiam in hoc caſu ſphæra A*m*C*n* ſit ad ſphæroidem ABCD, ut quadratum axis majoris AC ad quadratum minoris BD, & ſphęrois AMDN ad ſphæram A*d*D*b*, ut quadratum majoris axis MN ad quadratum minoris AD (e), ſicuti ob analogiam AC. BD = MN. AD (f), quatuor illa quadrata ſunt proportionalia (g) ita proportionalia itidem erunt illa quatuor ſolida (h).

SCO-

(a) §. 45. 46.
(b) §. 86.
(c) Lib. I. §. 125.
(d) §. 20.
(e) §. 86.
(f) §. 1.
(g) Lib. I. §. 118.
(h) §. 27

Digitized by Google

SCHOLION.

94. Patet ergo etiam in hoc caſu ſolida A*m*C*n*, ABCD, AMDN, A*d*D*b* reſpondere planis A*m*C, ABC, AMD, A*d*D, ex quibus circum axim rotantibus producuntur. Ut enim ipſa plana (a), ita ſolida ex illis genita, ſunt geometrice proportionalia, ipſaque ſolida ſunt in ratione *duplicata* planorum generantium.

LEMMA VI.

Si magnitudo A fuerit ad magnitudinem B, ut eſt prima a *quatuor continuo proportionalium* a, b, c, d *ad quartam* d, *altera autem magnitudo D fuerit ad eandem B, ut eſt eadem prima* a *ad tertiam* c, *magnitudo A erit ad magnitudinem D, ut tertia* c *ad quartam* d, *ſive ut prima* a *ad ſecundam* b.

95. Poſita nempe analogia $\div a . b . c . d$, ſi fuerit $A . B = a . d$, & $D . B = a . c$, erit $A . D = c . d = a . b$.

Demonſtratio.

Cum enim ex hypotheſi habeatur $A . B = a . d$, & $D . B = a . c$, erit quoque $A . a = B . d$, & $D . a = B . c$ (b), ſive $\frac{A}{a} = \frac{B}{d}$, & $\frac{D}{a} = \frac{B}{c}$, ac proinde $\frac{A}{a} . \frac{D}{a} = \frac{B}{d} . \frac{B}{c}$ (c). Eſt autem $A . D = \frac{A}{a} . \frac{D}{a}$ (d). Ergo erit ſimiliter $A . D = \frac{B}{d} . \frac{B}{c}$ (e). Conſtat porro, eſſe $\frac{B}{d} . \frac{B}{c} = c . d$ (f). Igitur erit $A . D = c . d$ (g), atque adeo $A . D = a . b$ (h), cum ſit $a . b = c . d$ per hypotheſim.

LEM-

(a) §. 53.
(b) Lib. I. §. 125.
(c) Ibid. §. 102.
(d) Ibid. §. 94.
(e) Ibid. §. 77.
(f) Ibid. §. 96.
(g) Ibid. §. 77.
(h) Ibid. §. 78.

Digitized by Google

LEMMA VII.

Si magnitudo A fuerit ad magnitudinem B, ut eſt prima a *trium continuo proportionalium* a, b, c *ad tertiam* c, *fuerit autem eadem A ad alteram E, ut eadem prima* a *ad ſecundam* b, *magnitudo E erit ad magnitudinem B, ut eſt ſecunda* b *ad tertiam* c, *ſive ut prima* a *ad ſecundam* b.

96. Ut ſi, poſita analogia $a.\ b = b.\ c$, fuerit $A.\ B = a.\ c$, & $A.\ E = a.\ b$, erit $E.\ B = b.\ c = a.\ b$.

Demonſtratio.

Enimvero, cum ſit $A.\ B = a.\ c$, & $A.\ E = a.\ b$, erit $A.\ a = B.\ c$, & $A.\ a = E.\ b$ (a); ac propterea $E.\ b = B.\ c$ (b). Igitur erit etiam $E.\ B = b.\ c$ (c), nec non $E.\ B = a.\ b$ (d), ex eo nimirum quod ſit $a.\ b = b.\ c$.

LEMMA VIII.

Si magnitudo A fuerit ad magnitudinem B, ut prima a *quatuor continuo proportionalium* a, b, c, d *ad quartam* d, *fuerit autem eadem A ad alteram E, ut eadem prima* a *ad tertiam* c, *magnitudo E erit ad magnitudinem B, ut tertia* c *ad quartam* d, *ſive ut prima* a *ad ſecundam* b.

97. Videlicet poſita analogia $\div a.\ b.\ c.\ d$, ſi fuerit $A.\ B = a.\ d$, & $A.\ E = a.\ c$, erit $E.\ B = c.\ d = a.\ b$.

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti. Nam propter hypotheſim habetur $A.\ a = B.\ d$, & $A.\ a = E.\ c$, adeoque $E.\ c = B.\ d$; ac proinde $E.\ B = c.\ d = a.\ b$. THEO-

(a) Lib. I. §. 125. (b) Ibid. §. 76. (c) Ibid. §. 125. (d) Ibid. §. 71.

Digitized by Google

THEOREMA IX.

Sphæra majoris axis ellipſeos eſt ad ſphæroidem latam ſibi inſcriptam, ſphærois lata ad ſphæroidem oblongam genitam ex revolutione ejuſdem ellipſis; & ſphærois oblonga ad inſcriptam ſibi ſphæram minoris axis ellipſis generatricis, ut major axis ipſius ellipſis ad axim minorem.

§.

98. Ex revolutione ſemiellipſis ABC circa minorem axim AC producta ſit ſphærois lata ABCD, cui circumſcripta ſit ſphæra EBGD genita ex revolutione ſemicirculi EBG circa Fig. 16. T. XVII. diametrum EG majori axi BD æqualem. Dico, ſphæram EBGD eſſe ad ſphæroidem ABCD, ut major axis EG, ſive BD ad minorem AC.

Demonſtratio I.

Recta *a* ſit æqualis majori axi BD, & *b* minori AC. Poſitis poſt rectas *a*, *b* duabus *c*, *d* continuo geometrice pro- Fig 19. portionalibus, ſphæra EBGD majoris axis *a* erit ad ſphæram, cujus diameter ſit ſecunda *b*, ſive axis minor AC, ut prima *a* ad quartam *d* (a). Sphærois autem lata ABCD eſt ad eandem ſphæram minoris axis AC, ut prima *a* ad tertiam *c* (b). Ergo ſphæra EBGD erit ad ſphæroidem latam ABCD, ut tertia *c* ad quartam *d*, ſive ut prima *a* ad ſecundam *b* (c), nempe ut major axis BD ad minorem AC.

Demonſtratio II.

Quoniam ſphæra EBGD producitur ex completa revolutione

(a) Lib. XII. §. 161.
(b) §. 95.
(c) Ibidem.

tione ſemicirculi EBG circa diametrum EG, quam metitur peripheria circuli in ea maximi B*e*D (a), & ſphærois ABCD ex completa itidem rotatione ſemiellipſis ABC circa axim AC, cujus revolutionis menſura eſt peripheria ejuſdem circuli B*e*D (b), ſphæra EBGD erit ad ſphæroidem ABCD, ut ſe habent duo producta, quæ fiunt ex multiplicatione duarum inæqualium magnitudinum per eandem. Hæc autem ſunt inter ſe, ut ipſæ inæquales magnitudines multiplicatæ (c). Ergo ſphæra EBGD erit ad ſphæroidem ABCD, ut ſemicirculus EBG ad ſemiellipſim ABC. Conſtat autem, ſemicirculum EBG eſſe ad ſemiellipſim ABC, ut eſt major axis BD ad minorem AC (d). Ergo ſphæra quoque EBGD erit ad ſphæroidem ABCD, ut major axis *B*D ad minorem AC (e).

I I.

99. Sphæroidi latæ AECF genitæ ex revolutione ſemiellipſis *d*E*b* circa minorem axim *db*, inſcripta concipiatur ſphærois oblonga ABCD producta ex revolutione ſemiellipſis ABC circa majorem axim AC, ſintque hujuſmodi plana generantia partes dimidiæ ejuſdem ellipſis. Dico, ſphæroidem latam AECF eſſe ad ſphæroidem oblongam ABCD, ut major axis AC, ſive EF ad minorem BD, ſive *bd*.

Fig. 18. T. XVII.

Demonſtratio I.

Poſita tertia *c* continuo geometrice proportionali poſt rectas *a*, *b*, quarum prima *a* majorem axim AC, ſecunda *b* minorem BD adæquet, ſphæra, cujus diameter ſit prima *a*, erit ad ſphæroidem oblongam ABC*D* ſibi inſcriptibilem, ut prima *a* ad tertiam *c* (f). Manifeſtum eſt autem, eandem ſphæram diametri *a* eſſe ad ſphæroidem latam ſibi itidem inſcriptibilem AECF, ut prima *a* ad ſecundam *b* (g). Ergo

Fig. 20.

(a) Lib. XI. §. 50.
(b) §. 16.
(c) Lib. I. §. 93.
(d) § 49.
(e) Lib. I. §. 77.
(f) §. 89.
(g) §. 98.

Digitized by Google

go ſphærois lata AECF erit ad ſphæroidem oblongam ABCD, ut ſecunda *b* ad tertiam *c*, ſive ut prima *a* ad ſecundam *b* (a), videlicet ut major axis AC ad minorem BD.

Demonſtratio II.

Quoniam ſphærois lata AECF fit ex revolutione ſemiellipſis *b*E*d* circa minorem axim *bd*, cujus menſura eſt peripheria circuli AECF majoris axis AC, & ſphærois oblonga ABCD ex revolutione ſemiellipſis ABC circa majorem axim AC, quam metitur peripheria circuli B*a*D minoris axis BD (b), ſphærois lata AECF, & ſphærois oblonga ABCD erunt inter ſe, ut duo producta, quæ fiunt ex multiplicatione ejuſdem magnitudinis per duas inæquales. (Æquales enim poſitæ ſunt ſemiellipſes generatrices *d*E*b*, ABC). Duo autem illa producta ſunt inter ſe, ut magnitudines inæquales multiplicantes (c). Ergo ſphærois quoque lata AECF erit ad ſphæroidem oblongam ABCD, ut peripheria circuli AECF ad peripheriam circuli B*a*D; adeoque ut major axis AC ad minorem BD (d).

III.

100. Ex revolutione ſemiellipſis ABC circa majorem axim AC producta fit ſphærois oblonga DABC, & ex revolutione ſemicirculi EBF circa diametrum EF minori axi DB æqualem ſphæra DEBF illi inſcripta. Dico, ſphæroidem oblongam DABC eſſe ad ſphæram DEBF, ut major axis AC ad minorem DB. Fig. 17. T. XVII.

Demonſtratio I.

Poſitis namque duabus rectis *c*, *d* continuo proportionalibus poſt rectas *a*, *b*, ſcilicet poſt majorem AC, & mino- Fig. 19.

(a) §. 96.
(b) §. 16.
(c) Lib. I. §. 93.
(d) Lib. IX. §. 155.

rem DB axim ellipſeos ABCD, ſphæra, cujus diameter ſit prima *a*, erit ad ſphæram, cujus diameter ſit ſecunda *b*, nempe ad ſphæram DEBF, ut prima *a* ad quartam *d* (a). Sphęra autem majoris axis AC, ſive rectæ *a*, eſt ad ſphæroidem oblongam ABCD ſibi inſcriptibilem, ut prima *a* ad tertiam *c* (b). Ergo ſphærois oblonga ABCD erit ad ſphæram DEBF, ut tertia *c* ad quartam *d*, ſeu ut prima *a* ad ſecundam *b* (c), videlicet ut major axis *AC* ad minorem *BD*.

Demonſtratio II.

Cum eadem ſit peripheria circuli B*a*D, quæ metitur rotationem ſemiellipſis *ABC*, ex qua oritur ſphærois *ABCD*, & rotationem ſemicirculi EBF, ex qua emergit ſphæra *DEBF*, duo hujuſmodi ſolida erunt inter ſe, ut duo producta, quæ fiunt ex multiplicatione duarum magnitudinum inæqualium per eandem; adeoque ut ipſæ magnitudines multiplicatæ (d), videlicet ut eſt ſemiellipſis ABC ad ſemicirculum EBF. Semiellipſis autem ABC eſt ad ſemicirculum EBF, ut major axis AC ad minorem BD (e). Ergo hæc eadem quoque erit ratio ſphæroidis ABCD ad ſphæram DEBF (f). Sphæra itaque &c. quod erat oſtendendum.

S C H O L I O N.

101. Singulas partes hujus theorematis duplici demonſtratione oſtendere opportunum cenſui, ut inde ſcilicet perſpicuum fieret, quam optime demonſtratio deſumta ex ipſorum ſolidorum geneſi, quæ poſteriorem locum tenet, priori conſentiat, quę principio communiter a peritiſſimis Geometris hac ipſa in re aſſumto, tota innititur.

CO-

(a) Lib. XIII. §. 161.
(b) §. 89.
(c) §. 97.
(d) Lib. I. §. 93.
(e) §. 49.
(f) Lib. I. § 77.

COROLLARIUM I.

102. *Sphæra majoris axis ellipſeos, & ſphærois lata illi inſcripta, ſicuti etiam ſphærois oblonga, & ſphæra minoris axis illi inſcripta, ſunt directe inter ſe, ut plana, ex quibus rotantibus producuntur.* Demonſtravimus enim, ſphæram EBGD eſſe ad ſphæroidem latam ſibi inſcriptam *ABCD*, ut eſt ſemicirculus EBG genitor ad ſemiellipſim generatricem ABC. Sphæroidem quoque oblongam *ADCB* eſſe ad inſcriptam ſibi ſphæram *BEDF*, ut ſemiellipſis generatrix *ADC* ad ſemicirculum genitorem *EDF*. Fig 16. Fig 17. T.XVII.

COROLLARIUM II.

103. Poſita ſimilitudine ellipſium *ABCD*, *AMDN*, ex quibus circa minorem axim revolutis ſphæroides latæ *ABCD*, *AMDN* generantur, ſphæra MBND circumſcripta ſphæroidi ABCD erit ad ipſam ſphæroidem, ut eſt ſphæra *a*M*e*N ad inſcriptam ſibi ſphæroidem AMDN. Etenim ex facta hypotheſi habetur BD. AC = MN. AD (a). Haud diſſimili ratione, ſi ellipſes ABCD, *abcd* fuerint ſimiles, ſphærois oblonga producta ex revolutione ſemiellipſis ABC circum axim majorem AC, erit ad ſphæram EBFD minoris axis ſibi inſcriptam, ut eſt ſphærois itidem oblonga genita ex ſemiellipſi *abc* rotante circa majorem axim *ac*, ad ſphæram itidem ſibi inſcriptam *ebfd*. Fig. 9. Fig. 10. T.XVII. Fig. 5. Fig. 6.

SCHOLION.

104. Cum ſemicirculus MBN ſit ad ſemiellipſim ABC ut ſemicirculus *aMe* ad ſemiellipſim AMD, & ſemiellipſis ABC ad ſemicirculum EBF, ut ſemiellipſis *abc* ad ſemicirculum *ebf* (b), ſintque hujuſmodi plana *reſpective* inter ſe, ut axis major ad minorem (c), patet, quam optime ſolida Fig. 9. Fig. 10. Fig. 5. Fig. 6. T.XVII.

(a) §. 6. (b) §. 53. (c) §. 49.

ex ipſis rotantibus genita iiſdem reſpondeant. Proportionalia enim ipſa quoque ſunt ſe, eorumque ratio a ratione ipſorum planorum non eſt diverſa.

COROLLARIUM III.

105. Hinc *alternando*, ſphærois lata ABCD erit ad ſphæ-
Fig. 9. roidem latam AMDN, ut ſphæra majoris axis MBND ad
Fig. 10. ſphæram majoris axis *a*M*e*N, & ſphærois oblonga ABCD
Fig. 5. Fig. 6. erit ad ſphæroidem oblongam *abcd*, ut ſphæra minoris axis
T. XVII. EBFD ad ſphæram minoris axis *ebfd* (a).

COROLLARIUM IV.

106. Quamobrem *ſphæroides latæ ſibi mutuo ſimiles, ſunt directe inter ſe, ut ſphæræ majorum axium ipſis circumſcriptæ, & ſphæroides oblongæ itidem ſimiles ſunt directe inter ſe, ut ſphæræ axium minorum ſibi inſcriptæ*. Illæ namque ſphæroides ſunt ſibi mutuo ſimiles, quæ ex revolutione ſemiellipſium ſimilium circa homologos axes generantur (b).

COROLLARIUM V.

107. Si ellipſis, ex qua rotante circa minorem axim fit ſphærois lata ABCD, fuerit ſimilis ellipſi, ex qua circa majorem axim rotante ſphærois oblonga BADC efficitur, ſphæ-
Fig. 16. Fig. 17. ra majoris axis EBGD erit ad ſphæroidem latam ABCD ſibi
T. XVII. inſcriptam, ut eſt ſphærois oblonga BADC ad inſcriptam ſibi ſphæram minoris axis BEDF. Sphæra namque EBGD eſt ad ſphæroidem ABCD, ut major axis BD ad minorem AC (c), & ſphęrois ADCB ad ſphæram BEDF, ut major itidem axis AC ad minorem BD (d); atque horum axium rationes ſunt ex facta hypotheſi inter ſe æquales (e).

SCHO-

(a) Lib. I. §. 125.
(b) §. 20.
(c) §. 98.
(d) §. 100.
(e) §. 1.

Digitized by Google

SCHOLION.

108. Obſervare ne pigeat, in hoc itidem caſu ſolida genita planis generantibus reſpondere. Ipſa namque plana ſunt, quemadmodum ſolida ex illis rotantibus genita, geometrice proportionalia, atque ipſorum ratio a ratione ipſorum ſolidorum non eſt diverſa. Conſtat enim, ſemicirculum EBG eſſe ad ſemiellipſim ABC, ut eſt ſemiellipſis ADC ad ſemicirculum EDF (a), & hanc rationem ab ea non differre, quam habet major axis ad minorem (b). Remanet idcirco, *ex rotatione per eandem viam quatuor planorum geometrice proportionalium quatuor ſolida geometrice proportionalia oriri, & ea quidem lege, ut in uno caſu genita ſolida ſint in ratione duplicata planorum generantium* (c); *in altero vero ſint in ratione ipſorum planorum.*

COROLLARIUM VI.

109. *Si autem eadem fuerit ellipſis, ex qua rotante ſphærois tum lata, quam oblonga producitur, ſphæra majoris axis, ſphærois lata, ſphærois oblonga, & ſphæra minoris axis erunt quatuor ſolida continuo inter ſe geometrice proportionalia, adeo nimirum, ut ſphærois lata, & ſphærois oblonga ſint duo ſolida media continuo geometrice proportionalia inter ſphæram majoris axis, & ſphæram axis minoris ellipſis generatricis.* Ut ſi ellipſis *d*N*e*R, ex qua rotante circa minorem *de*, fit ſphærois Fig. 1.
lata *d*N*e*R, non fuerit diverſa ab ellipſi M*a*P*b*, ex qua circa T.XVIII
majorem axim MP revoluta producitur ſphærois oblonga M*a*P*b*, ſphæra MNPR majoris axis MP erit ad ſphæroidem latam *d*N*e*R, ut eſt ſphærois ipſa *d*N*e*R ad ſphæroidem oblongam M*a*P*b*, atque ut ſphærois lata *d*N*e*R ad oblongam M*a*P*b*, ita erit ſphærois oblonga M*a*P*b* ad ſphæram minoris axis *daeb*. Sunt enim omnia iſta ſolida inter ſe, ut major axis MP ad minorem *de* (d).

SCHO-

(a) §. 56. (b) §. 49. (c) 17. (d) §§. 98. 99. 100.

S C H O L I O N.

110. Quoniam autem etiam plana generantia, nempe ſemicirculus MNP, & ſemiellipſis *d*N*e*, ſemiellipſis M*a*P, & ſemicirculus *dae*, ſunt inter ſe, ut major axis MP ad minorem *de* (a), ſolida ex illis genita non ſolum ſunt continuo geometrice proportionalia inter ſe, verum etiam eorum proportio eadem eſt cum proportione ipſorum planorum. Patet inſuper, quam pulchre iſtiuſmodi ſolida generantibus planis conſentiant. Ut enim tam planum ſemiellipticum *d*N*e*, quam planum ſemiellipticum M*a*P eſt medium geometrice proportionale inter plana ſemicircularia MNP,*dae* (b), ita ſphæroidalia ſolida a planis illis ſemiellipticis genita,ſunt media continuo geometrice proportionalia inter ſphæras ab ipſis planis ſemicircularibus productas. Quoniam vero ſphæroides lata, & oblonga productæ a ſemiellipſibus *d*N*e*, M*a*P non tantum diſſimiles ſunt inter ſe, verum etiam inæquales, cum tamen ſemiellipſes generatrices ſint quidem figura diſſimiles, ſed quantitate æquales, illud mirabile occurrit, quod ſicuti inter diſſimiles illas ſemiellipſes generatrices ſtat identitas quantitatis, ob quam ſubſiſtit continua proportio inter tria inæqualia plana generantia, ita inter genitas ſphęroides figura diſſimiles, & quantitate inæquales ſtat identitas proportionis, propter quam manet continua geometrica proportio inter quatuor ſolida genita.

LEM-

(a) §. 49. (b) §. 51.

Digitized by Google

LEMMA IX.

Si magnitudo A *fuerit ad magnitudinem* B, *ut prima* a *trium* a, b, d *ad ſecundam* b; *eadem vero magnitudo* A *fuerit ad alteram* D, *ut eadem prima* a *ad tertiam* d, *magnitudo* B *erit ad magnitudinem* D, *ut ſecunda* b *ad tertiam* d

111. Nempe, ſi datis tribus A, B, D, nec non tribus *a*, *b*, *d*, fuerit A. B = *a*. *b*, & A. D = *a*. *d*, erit B. D = *b*. *d*

Demonſtratio.

Etenim, cum ſit A. B = *a*. *b*, & A. D = *a*. *d*, erit A. *a* = B. *b*, & A. *a* = D. *d* (a); ac proinde B. *b* = D. *d* (b); & ideo B. D = *b*. *d* (c). Si ergo &c.

LEMMA X.

Si magnitudo A *fuerit ad magnitudinem* D, *ut prima* a *trium* a, b, d *ad tertiam* d; *ad eandem vero* D *fuerit altera* B, *ut eadem prima* a *ad ſecundam* b, *erit magnitudo* A *ad magnitudinem* B, *ut ſecunda* b *ad tertiam* d.

112. Poſitis nempe tribus A, B, D, nec non tribus *a*, *b*, *d*, ſi fuerit A. D = *a*. *d*, & B. D = *a*. *b*, erit A. B = *b*. *d*.

De-

(a) Lib. I. §. 125.
(b) Ibidem §. 76.
(c) Ibidem §. 125.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Cum enim ſit A . D = *a* . *d*, & B. D = *a*. *b*, erit A. *a* = D. *d*, & B. *a* = D. *b*(b), nempe $\frac{A}{a} = \frac{D}{d}$, & $\frac{B}{a} = \frac{D}{b}$, ac proinde erit etiam $\frac{A}{a} . \frac{B}{a} = \frac{D}{d} , \frac{D}{b}$ (b). Eſt autem $\frac{D}{d} . \frac{D}{b} = b . d$ (c). Ergo erit ſimiliter $\frac{A}{a} . \frac{B}{a} = b . d$ (d). Conſtat porro, eſſe A. B = $\frac{A}{a} . \frac{A}{a}$ (e). Igitur erit etiam A. B = *b* . *d* (f). Itaque ſi &c.

Lem.

(a) Lib.I. §.125.
(b) Ibid. §. 102,
(c) Ibidem §. 165.
(d) Ibidem §.77.
e) Ibidem §. 164.
(f) Ibidem §. 78.

L E M M A XI.

Si magnitudo A fuerit ad magnitudinem B, ut prima a *quatuor magnitudinum* a, b, c, d *ad quartam* d, *ad eandem vero B fuerit magnitudo altera D, ut ſecunda* b *ad tertiam* c, *magnitudo A erit ad magnitudinem D in ratione compoſita ex ratione primæ* a *ad ſecundam* b, *& ex ratione tertiæ* c *ad quartam* d.

113. Nimirum, ſi poſitis quatuor a, b, c, d, fuerit $A.B = a.d$, & $D.B = b.c$, erit $\frac{A}{D} = \frac{ac}{bd}$, quæ fractio exprimit rationem compoſitam ex rationibus $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ (a).

Demonſtratio.

Cum enim ex hypotheſi ſit $A.B = a.d$, ſive $\frac{A}{B} = \frac{a}{d}$, ſitque $\frac{a}{d} = \frac{abc}{bcd}$ (b), erit etiam $\frac{A}{B} = \frac{abc}{bcd}$ (c). Eſt autem itidem ex hypotheſi $\frac{D}{B} = \frac{b}{c}$. Ergo erit $\frac{A}{B}.\frac{D}{B} = \frac{abc}{bcd}, \frac{b}{c}$ (d). Conſtat porro, eſſe $\frac{A}{B}.\frac{D}{B} = A.D$ (e). Igitur erit quoque

(a) Lib. I. §. 167.
(b) Ibid. §. 176.
(c) Ibid. §. 76.
(d) Ibid. §. 102.
(e) Ibidem §. 94.

Digitized by Google

$A \cdot D = \frac{abc}{bcd} \cdot \frac{b}{c}$ (a). Quotus autem antecedentis $\frac{abc}{bcd}$ diviſi per conſequentem $\frac{b}{c}$ eſt $\frac{abcc}{bcdb}$ (b), ſive $\frac{ac}{bd}$ (c). Ergo erit etiam $\frac{A}{D} = \frac{ac}{bd}$ (d); adeoque &c.

COROLLARIUM.

114. Si quatuor magnitudines a, b, c, d ita ſe habuerint, ut tres a, c, d ſint continuo geometrice inter ſe proportionales, magnitudo A erit ad magnitudinem D in ratione compoſita ex rationibus $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$. Poſita namque æqualitate rationum $\frac{a}{c}$, $\frac{c}{d}$, erit $\frac{a}{b} \times \frac{a}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, ſive $\frac{aa}{bc} = \frac{ac}{bd}$ (e).

THEOREMA X.

Superficies ſphæroidis latæ eſt ad ſuperficiem ſphæræ, cujus diameter ſit major axis ellipſis generatricis, ut media arithmetice proportionalis inter ejuſdem ellipſis axes ad axim majorem. Superficies vero ſphæroidis oblongæ eſt ad ſuperficiem ſphæræ, cujus diameter ſit minor axis ellipſis generatricis, ut media arithmetice proportionalis inter ejuſdem axes ad axim minorem.

I.

115. Ex revolutione ſemiellipſis DAB circa minorem axim DB

(a) Lib I. §. 78. (b) Syn. Alg. §. 119. (c) Ibid. §. 73. (d) Lib. I. §. 34. (e) Ibid. §. 10.

Digitized by Google

DB producta intelligatur ſphærois lata DABC, cui circumſcripta ſit ſphæra EAFC genita ex revolutione circumſcripti ſemicirculi EAF circa diametrum EF majori axi AC æqualem. Dico, ſuperficiem ſphæroidis DABC eſſe ad ſuperficiem ſphæræ EAFC, ut eſt media arithmetice proportionalis inter axes AC, BD ellipſis generatricis ad ejuſdem axim majorem AC. Fig. 2. T.XVIII

Demonſtratio.

Quoniam ſuperficies ſphæroidis DABC oritur ex revolutione ſemiperimetri elliptici DAB circum axim DB, quam metitur integra peripheria circuli AMC majoris axis AC, & ſuperficies ſphęrę EAFC fit ex rotatione ſemiperipheriæ EAF circa diametrum EF, quam revolutionem metitur eadem peripheria circuli AMC (a), ſuperficies ſphæroidis DABC erit ad ſuperficiem ſphæræ EAFC, ut ſe habent producta, quæ fiunt ex multiplicatione duarum inæqualium quantitatum per eandem, adeoque ut ipſæ magnitudines multiplicatæ (b), videlicet ut ſemiperimeter ellipticus DAB ad ſemiperipheriam circularem EAF. Semiperimeter autem ellipticus DAB eſt ad ſemiperipheriam circularem EAF, ut media arithmetice proportionalis inter axes AC, DB ad axim majorem AC (c). Ergo ſuperficies ſphæroidis DABC erit ad ſuperficiem ſphæræ EAFC, ut media arithmetice proportionalis inter axes AC, BD ad axim majorem AC (d).

II.

116. Eſto modo ſphærois oblonga ABCD genita ex revolutione ſemiellipſis ABC circum axim majorem AC, eique inſcripta ſit ſphæra EBFD producta ex revolutione inſcripti ſemicirculi EBF, cujus proinde diameter BD ſit æqualis minori axi ellipſis generatricis. Dico, ſuperficiem ſphæroidis Fig. 3. T.XVIII

D d 2 ABCD

(a) §. 16. & Lib. XI. §. 50.
(b) Lib. I §. 93.
(c) § 35.
(d) Lib. I. §. 77.

ABCD eſſe ad ſuperficiem ſphæræ EBFD, ut eſt media arithmetice proportionalis inter axes AC, BD ad axim minorem BD.

Demonſtratio.

Haud diſſimilis eſt a præcedenti. Cum enim hujuſmodi ſuperficies producantur ex revolutione ſemiperimetri elliptici ABC, & ſemiperipheriæ circularis EBF circa eandem rectam AC, cujus revolutionis menſura eſt peripheria ejuſdem circuli BMD in utroque ſolido maximi, ſuperficies ſphæroidis ABCD erit ad ſuperficiem ſphæræ EBFD, ut ſunt producta, quæ fiunt ex multiplicatione duarum inæqualium magnitudinum per eandem; atque adeo ut ipſæ magnitudines multiplicatæ, videlicet ut ſemiperimeter ellipticus ABC ad ſemiperipheriam circularem EBF. Conſtat autem, ſemiperimetrum ABC eſſe ad ſemiperipheriam EBF, ut media arithmetice proportionalis inter axes AC, BD ad axim minorem BD (a). Ergo in hac eadem quoque ratione erunt ſuperficies ſphæroidalis ABCD, & ſphærica EBFD. Itaque ſuperficies ſphæroidis &c. quod erat oſtendendum.

S C H O L I O N.

117. Arbitrandum non eſt, hiſce tantummodo ſolidis, ſphæroidalibus nempe, atque ſphæricis, proprium eſſe, ut ratio ſuperficierum non ſit diverſa a ratione linearum, ex quibus circa datum axim revolutis producuntur, neque ut ratio ſoliditatum eorundem ab ea differat, quam habent plana generantia, dummodo eadem curva horum planorum revolutionem metiatur. Utrumque enim etiam in conis rectis eandem baſim habentibus manifeſte conſtat. Sint namque duo triangula rectangula BAC, B*a*C ejuſdem baſis BC, Fig. 4. T. XVIII ex quorum revolutione circa latus AC, quod recto angulo BCA adjacet, duo fiant coni BAD, B*a*D. Cum igitur coni ejuſdem baſis ſint directe inter ſe, ut eorum altitudines (b), conus

(a) § 35   (b) Lib. XIII. §. 50.

Digitized by Google

conus BAD erit ad conum B*a*D, ut altitudo AC ad altitudinem *a*C. In eadem autem ratione eſt etiam triangulum BAC ad triangulum B*a*C (a). Ergo coni BAD, B*a*D geniti ex revolutione triangulorum BAC, B*a*C ſunt inter ſe, ut plana ipſa generantia BAC, B*a*C. Rurſus quoniam eadem eſt baſis BD utriuſque coni, ſuperficies coni BAD erit ad ſuperficiem coni B*a*D, ut latus BA ad latus B*a* (b). Latera autem BA, B*a* ſunt illa, ex quibus rotantibus circa communem rectam AC producuntur conicæ ſuperficies BAD, B*a*D. Ergo conicæ ipſæ ſuperficies ſunt directe inter ſe, ut lineę, ex quibus rotantibus generantur.

COROLLARIUM I.

118. Superficies ſphæroidis latæ *d*N*e*R eſt ad ſuperficiem ſphæræ *daeb* minoris axis *de* ellipſis generatricis, ut media arithmetice proportionalis *e* inter axes *a*, *b* ad tertiam *d* continuo geometrice proportionalem poſt majorem axim *a*, & minorem *b* ipſius ellipſis. Cum enim ſuperficies ſphæræ MNPR majoris axis NR ſit ad ſuperficiem ſphæroidis latæ *d*N*e*R ſibi inſcriptæ, ut major axis *a* ad mediam arithmetice proportionalem *e* (c), ſit vero eadem ſuperficies ſphæræ MNPR ad ſuperficiem ſphæræ *daeb*, ut eadem prima *a* ad tertiam geometrice proportionalem *d* (d), remanet, ſuperficiem ſphæroidis latæ *d*N*e*R eſſe ad ſuperficiem ſphæræ *daeb*, ut recta *e* ad rectam *d* (e). Fig. 1. Fig. 5. T. XVIII

COROLLARIUM II.

119. Hinc ſuperficies ſphæroidis latæ *d*N*e*R eſt ad ſuperficiem ſphæroidis oblongæ M*a*P*b* genitæ ex revolutione ejuſdem ellipſis circa majorem axim, ut axis major ad minorem. Enimvero, cum ſuperficies ſphæroidis latæ *d*N*e*R ſit ad ſuperficiem ſphæræ *daeb* minoris axis, ut media arithmetice pro-

(a) Lib. IX. §. 101.
(b) Lib. XIV. §. 53.
(c) §. 115.
(d) Lib. XIII. §. 128.
(e) §. 111.

proportionalis *e* ad tertiam geometrice poſt axes proportionalem *d* (a); & ſuperficies ſphæroidis oblongæ M*a*P*b* ſit ad ſuperficiem ejuſdem ſphæræ *daeb*, ut media arithmetice proportionalis *e* ad minorem axim, ſive ad rectam *b* (b), manifeſte ſequitur, ſuperficiem ſphæroidis latæ *d*N*e*R eſſe ad ſuperficiem ſphæroidis oblongæ M*a*P*b*, ut recta *b* ad tertiam geometrice proportionalem *d* (c) ſive ut *a* ad *b*; atque adeo ut major axis ellipſis generatricis ad minorem.

COROLLARIUM III.

120. Ex hoc planum efficitur, *ſuperficies ſphæroidis latæ, & ſphæroidis oblongæ, ſi utraque ex eadem rotante ellipſi genita fuerit, eſſe directe inter ſe, ut earundem ſoliditates*. Conſtat enim, hujuſmodi ſolida eſſe itidem inter ſe, ut major axis ellipſis generatricis ad minorem (d).

COROLLARIUM IV.

121. Sequitur quoque, ſuperficiem ſphæræ majoris axis MNPR eſſe ad ſuperficiem ſphæroidis oblongæ M*a*P*b* ſibi inſcriptæ in ratione compoſita ex ratione majoris axis *a* ad mediam arithmetice proportionalem *e*, & ex ratione majoris ejuſdem axis *a* ad axim minorem *b*. Etenim, poſita eadem tertia *d* geometrice proportionali poſt axes *a*, *b*, cum ſuperficies ſphæræ MNPR ſit ad ſuperficiem ſphæræ *daeb* minoris axis, ut prima *a* ad tertiam geometrice proportionalem *d* (e), & ſuperficies ſphæroidis oblongæ M*a*P*b* ſit ad ſuperficiem ejuſdem ſphæræ *daeb*, ut media inter axes arithmetice proportionalis *e* ad axim minorem *b* (f), remanet, ſuperficiem ſphæræ MNPR eſſe ad ſuperficiem ipſius ſphæroidis M*a*P*b* in ratione compoſita ex ratione primæ *a* ad mediam arithmetice proportionalem *e*, & ex ratione minoris axis *b* ad tertiam continuo geometrice proportiona-

Fig. 1. Fig. 5. T. XVIII.

(a) §. 118.
(b) §. 116.
(c) §. 112.
(d) §. 99.
(e) Lib. XIII. §. 12*.
(f) §. 116.

tionalem *d* (a) ſeu propter hypotheſim ex ratione magnitudinis *a* ad magnitudinem *e*, & ex ratione ejuſdem *a* ad magnitudinem *b*, ſive majoris axis ad minorem (b).

THEOREMA XI.

Superficies cujuslibet ſphæroidis adæquat curvam ſuperficiem cylindri recti, cujus baſis ſit maximus circulus ipſius ſphæroidis, altitudo vero ſit media arithmetice proportionalis inter axes ellipſis generatricis.

I.

122. Eſto ſphærois lata DABC genita ex revolutione ſemiellipſis DAB circa minorem axim DB. Fiat autem cylindrus rectus *abFxn*, cujus baſis *bFx* ſit maximus circulus ipſius ſphæroidis, ſive circulus majoris axis AC ellipſis generatricis, altitudo vero *ab* ſit media arithmetice proportionalis inter ipſius ellipſis axes AC, DB. Dico, ſuperficiem ſphæroidis DABC æquare curvam ſuperficiem cylindri *abFxn*. Fig. 1. T. XVIII

Demonſtratio

Concipiatur ſphæra EAFC producta ex revolutione ſemicirculi EAF circa diametrum EF majori axi AC æqualem, atque adeo ipſi ſphæroidi DABC circumſcripta. Ipſi autem ſphæræ circumſcriptus habeatur cylindrus rectus *deym*, cujus baſis ſit circulus maximus ipſius ſphæræ, adeoque etiam inſcriptæ ſphæroidis; altitudo vero *de* ſit ejuſdem ſphæræ diametro EF, ſeu majori axi AC æqualis. Itaque, cum æquales ſint baſes cylindrorum *abxn*, *deym*, ſuperficies curva cylindri *abxn* erit ad curvam ſuperficiem cylindri *deym*, ut eſt latus, ſive altitudo *ab* ad latus, ſive ad altitudinem *ed*

(a),

(a) §. 111.
(b) §. 114.

(a), ſeu per conſtructionem ut media arithmetice proportionalis inter axes AC, D*B* ad axim majorem AC. Eſt autem etiam ſuperficies ſphæroidis *DABC* ad ſuperficiem ſphæræ *EAFC*, ut ipſa eadem media *ab* ad axim majorem *A*C (b). Ergo ſuperficies ſphæroidis *ABCD* eſt ad ſuperficiem ſphæræ *EAFC*, ut eſt ſuperficies curva cylindri *abxn* ad curvam ſuperficiem cylindri *deym* (c). Conſtat autem, ſuperficiem ſphæræ *EAFC* æquare ſuperficiem cylindri *deym* (d). Ergo etiam ſuperficies ſphæroidis *DABC* æquabit curvam ſuperficiem cylindri *abxn* (e).

II.

123. Spectetur modo ſphærois oblonga *ABCD* producta ex revolutione ſemiellipſis *ABC* circa majorem axim *AC*, eique inſcripta habeatur ſphæra *EBFD* minoris axis *BD*. Fiat autem cylindrus rectus *abzn*, cujus baſis *bCz* ſit æqualis maximo circulo ipſius ſphæroidis, altitudo vero *ab* ſit media arithmetice proportionalis inter axes *AC*, *BD* ellipſis generatricis *ABCD*. Dico, ſuperficiem ſphæroidis *ABCD* æquare curvam ſuperficiem cylindri *abzn*.

Fig. 1. T.XVIII

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Etenim conſtituto cylindro recto *deym* circumſcribente ſphæram *EBFD*, atque adeo hujuſmodi, ut ejus baſis *ey* ſit æqualis baſi *bCx* cylindri *abzn*, & altitudo *de* adæquet minorem axim *BD*, curva ſuperficies cylindri *abzn* erit ad curvam ſuperficiem cylindri *deym*, ut recta *ab* ad rectam *de* (f) adeoque ut ſuperficies ſphæroidis *ABCD* ad ſuperficiem ſphæræ *EBFD* (g). Superficies autem ſphæræ *EBFD* adęquat ſuperficiem cylindri *deym* (h). Ergo etiam ſuperficies ſphęroidis *ABCD* ęquabit curvam ſuperficiem cylindri *abzn* (i). Itaque ſuperficies &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Lib. XIV. §. 35.
(b) § 115.
(c) Lib. I. §. 76.
(d) Lib. XIV. §. 71.
(e) Lib. I. §. 128.
(f) Lib. XIV. §. 35.
(g) §. 116.
(h) Lib. XIV. §. 71.
(i) Lib. I. §. 128.

Digitized by Google

COROLLARIUM

Superficies ſphæroidis cujuſcunque adæquat rectangulum contentum ſub peripheria circuli in ipſa ſphæroide maximi, & ſub media arithmetice proportionali inter axes ellipſis generatricis.

124. Hujuſmodi namque rectangulo eſt æqualis curva ſuperficies cylindri recti (a), quam ſphæroidis ſuperficies adequat.

PROBLEMA III.

Superficiem ſphæroidis dimetiri.

125. Eſto ſphærois DABC, cujus ſuperficiem dimetiri oporteat.

Reſolutio.

Inveniatur tum valor peripheriæ circuli in ipſa ſphæroide maximi (b), tum media arithmetice proportionalis inter axes AC, BD ellipſis generatricis (c); atque valores hujuſmodi inter ſe multiplicentur. Factum dabit valorem ſuperficiei quæſitum. Ut, ſi peripheria circuli in ſphæroide maximi fuerit $= m$, & media arithmetice proportionalis inter axes AC, BD fuerit $= n$, ſuperficies ſphæroidis erit $= mn$. Fig. 2. T. XVIII

Demonſtratio.

Patet ex §. 124. Etenim factum mn exprimit valorem rectanguli, cui ipſa ſphæroidis ſuperficies eſt æqualis.

(a) Lib. XIV. §. 26.
(b) Lib. X. §. 40.
(c) Lib. I. §. 199.

Digitized by Google

SCHOLION.

126. Cum circulus maximus in ſphæroide lata ſit ille, cujus diameter eſt major axis ellipſis generatricis, in ſphęroide vero oblonga ille ſit, cujus diameter eſt axis minor ipſius ellipſis (a), manifeſte apparet, quomodo valor peripherię circuli in utraque ſphæroide maximi inveniri poſſit.

THEOREMA XII.

Sphærois lata eſt æqualis ſphæræ, cujus diameter ſit prima duarum mediarum continuo geometrice proportionalium inter axes ellipſis generatricis ſumta poſt majorem axim. Sphærois vero oblonga adæquat ſphæram, cujus diameter ſit itidem prima duarum mediarum continuo geometrice proportionalium inter axes ellipſis generatricis ſumta poſt axim minorem.

I.

Fig. 1. Fig. 6. Fig. 7. T. XVIII

127. Ex revolutione ſemiellipſis *dNe* circa minorem axim *de* producta ſit ſphærois lata *dNeR*. Inter rectas autem *a*, *b*, quarum altera ſit æqualis majori axi NR, altera axi minori *de*, poſitæ intelligantur duæ mediæ *d*, *e* continuo geometrice proportionales, quarum prima *d* poſt rectam *a* majori axi æqualem ſit diameter AB ſphæræ AB. Dico, ſphæroidem latam *dNeR* ſphæræ AB eſſe æqualem.

Demonſtratio.

Quoniam quatuor rectæ *a*, *d*, *e*, *b* ſunt continuo geometrice proportionales, ſphæra, cujus diameter ſit prima *a*, ſcilicet ſphæra MNPR majoris axis NR, erit ad ſphæram AB,

(a) §. 13.

AB, ut prima *a* ad quartam *b*, videlicet ut major axis NR ad minorem *de* (a). Sphæra autem MNPR eſt itidem ad ſphæroidem latam *d*N*e*R, ut major axis NR ad minorem *de* (b). Ergo eadem erit ratio ſphæræ MNPR ad ſphæroidem *d*N*e*R, & ad ſphæram AB (c). Quamobrem ſphærois lata *d*N*e*R, & ſphæra AB erunt æquales (d).

II.

128. Eſto ſphærois oblonga M*a*P*b* genita ex revolutione ſemiellipſis M*a*P circa majorem axim MP. Inter rectas autem *a*, *b*, quæ ſint axibus MP, *ab* ellipſis generatricis æquales, poſitæ habeantur duæ mediæ *d*, *e* continuo geometrice proportionales, ſitque recta *e*, prima poſt rectam *b* minori axi *ab* æqualem, diameter CD ſphæræ CD. Dico, ſphæroidem M*a*P*b* æquare ſphæram CD. Fig. 1. Fig. 6 Fig. 8. T. XVIII

Demonſtratio.

Eadem eſt cum præcedenti. Cum enim ſphæra primæ *b*, videlicet minoris axis *ab*, nempe ſphæra *daeb*, ſit ad ſphæram CD, ut prima *b* ad quartam *a* (e), ſcilicet ut minor axis *ab* ad majorem MP, & hæc itidem ſit ratio ſphæræ *daeb* ad ipſam ſphæroidem oblongam M*a*P*b* (f), eadem erit ratio ſphæræ *daeb* ad ſphæroidem M*a*P*b*, & ad ſphæram CD (g). Ergo ſphęrois M*a*P*b* adæquat ſphęram CD (h). Itaque ſphęrois lata &c. quod erat oſtendendum.

(a) Lib. XVI. §. 161.
(b) §. 98.
(c) Lib. I. §. 76.
(d) Ibid. §. 113.
(e) Lib XIII. §. 161.
(f) §. 100.
(g) Lib. I. §. 76.
(h) Ibid. §. 113.

THEOREMA XIII.

Superficies ſphæroidis latæ adæquat ſuperficiem ſphæræ, cujus diameter ſit media geometrice proportionalis inter majorem axim ellipſis generatricis, & mediam arithmetice proportionalem inter ejuſdem axes. Superficies vero ſphæroidis oblongæ adæquat ſuperficiem ſphæræ, cujus diameter ſit media geometrice proportionalis inter axim minorem ellipſis generatricis, & mediam arithmetice proportionalem inter axes ejuſdem

I.

Fig. 9. Fig. 1. Fig 7. T. XVIII

129. Recta *a* adæquet majorem axim NR, & recta *c* minorem axim *de* ellipſis *d*N*e*R, ex qua rotante circa minorem axim *de* producta ſit ſphærois lata *d*N*e*R. Inter rectas autem *a*, *c* poſita ſit media arithmetice proportionalis *b*, atque inter primam *a*, & ipſam *b* ſit media geometrice proportionalis *e*, quæ ſit diameter ſphæræ AB. Dico, ſuperficiem ſphæroidis latæ *d*N*e*R æquare ſuperficiem ſphæræ AB.

Demonſtratio.

Ex revolutione ſemicirculi MNP producta ſit ſphæra MNPR circumſcribens ſphæroidem ipſam *d*N*e*R. Superficies itaque ſphæræ MNPR erit ad ſuperficiem ſphæroidis *d*N*e*R, ut major axis NR ad mediam arithmetice proportionalem inter axes NR, *de* (a), ſive ex conſtructione, ut prima *a* ad tertiam geometrice proportionalem *b*. Superficies autem ſphæræ MNPR eſt itidem ad ſuperficiem ſphæræ AB, ut eadem prima *a* ad tertiam *b* (b). Ergo ſuperficies

(a) §. 115. (b) Lib. XIII. §. 128.

ficies ſphæræ MNPR eandem habet rationem ad ſuperficiem ſphæroidis *d*N*e*R, & ad ſuperficiem ſphæræ AB (a). Igitur ſuperficies ſphæroidis *d*N*e*R adæquat ſuperficiem ſphæræ AB (b).

I I.

130. Recta *a* ſit æqualis majori axi MP, & recta *c* minori *ab* ellipſis M*a*P*b*, ex qua rotante circa majorem axim producta ſit ſphærois oblonga M*a*P*b*. Poſita autem recta *b* media arithmetice proportionali inter ipſas *a*, *c*, recta *d* ſit media geometrice proportionalis inter rectam *b*, & rectam *c*, ipſaque *d* ſit diameter ſphæræ CD. Dico, ſuperficiem ſphæroidis oblongæ M*a*P*b* æquare ſuperficiem ſphæræ CD. Fig. 9. Fig. 1. Fig. 8. T. XVIII

Demonſtratio.

Haud diſſimilis eſt a præcedenti. Quandoquidem, cum ſuperficies ſphæræ *daeb* ſphæroidi inſcriptæ ſit ad ſuperficiem ipſius ſphæroidis, ut recta *c* ad rectam *b* (c), atque in eadem quoque ratione ſit ad ſuperficiem ſphęrę CD (d), manifeſte ſequitur, ſuperficiem ſphæroidis M*a*P*b*, & ſuperficiem ſphæræ CD eſſe æquales (e). Itaque ſuperficies ſphæroidis &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Superficies ſphæroidis latæ adæquat aream circuli, cujus radius ſit media geometrice proportionalis inter majorem axim ellipſis generatricis, & rectam mediam arithmetice proportionalem inter ejuſdem ellipſis axes.

131. Superficies nimirum ſphæroidis latæ *d*M*e*R æquabit

(a) Lib. I. §. 76.
(b) Lib. I. §. 113.
(c) §. 116.
(d) Lib. XIII. §. 128.
(e) Lib. I. §. 113.

bit aream circuli, cujus radius ſit recta *e*. Hujuſmodi namque circulo eſt æqualis ſuperficies ſphæræ AB (a).

COROLLARIUM II.

Superficies ſphæroidis oblongæ adæquat aream circuli, cujus radius ſit media geometrice proportionalis inter minorem axim ellipſeos generatricis, & rectam mediam arithmetice proportionalem inter ejuſdem ellipſis axes.

132. Sic ſuperficies ſphæroidis oblongæ MaPb erit æqualis areæ circuli, cujus radius ſit recta *d*. Hujuſce enim circuli aream adæquat ſuperficies ſphæræ CD (b).

COROLLARIUM III.

133. *Diameter ſphæræ, cujus ſuperficies adæquat ſuperficiem ſphæroidis latæ, eſt media geometrice proportionalis inter majorem axim ellipſis generatricis, & mediam arithmetice proportionalem inter axes ejuſdem. Diameter vero ſphæræ, cujus ſuperficies eſt æqualis ſuperficiei ſphæroidis oblongæ, eſt media geometrice proportionalis inter minorem axim, & mediam arithmetice proportionalem inter axes ellipſis generatricis.*

THEOREMA XIV.

Quævis ſphærois eſt in ratione ſubſequialtera ad cylindrum ſibi circumſcriptum.

I.

Fig. 13. T. XVII. 134. Sphæroidi oblongæ ABCD circumſcriptus habeatur cylindrus EMNF genitus ex revolutione rectanguli AEMC, ſemiellipſi generatrici ABC circumſcripti, circa majorem axim

(a) Lib. XIV. §. 72. (b) Ibid.

Digitized by Google

axim AC. Dico, ſphæroidem ABCD eſſe in ratione *ſubſequi-altera* ad cylindrum EMNF, videlicet ut 2 ad 3.

Demonſtratio.

Sphæroidi ABCD circumſcripta ſit ſphæra AγCx, huic vero circumſcriptus ſit cylindrus LRQ. Quoniam igitur ſphærois ABCD eſt ad ſphæram AγCx, ut circulus minoris axis BD ad circulum axis majoris AC (a), videlicet ut circulus MN ad circulum RQ, qui ſunt baſes cylindrorum EN, LQ ejuſdem altitudinis AC, ſphærois ABCD erit ad ſphæram AγCx, ut cylindrus EN ad cylindrum LQ (b). Hujuſmodi namque cylindri ſunt *directe* inter ſe, ut baſium circuli (c). Ergo alternando, ſphærois ABCD erit ad cylindrum EN, ut ſphæra AγCx ad cylindrum LQ (d). Eſt autem ſphæra AγCx in ratione *ſubſeſquialtera* ad cylindrum LQ (e). Ergo in ratione quoque *ſubſeſquialtera* erit ſphærois ABCD ad cylindrum EN.

II.

135. Spectetur modo ſphærois lata BADC, cui circumſcriptus ſit cylindrus GH. Dico, illam quoque eſſe in ratione *ſubſeſquialtera* ad cylindrum GH. Fig. 17. T. XVII.

Demonſtratio.

Oſtenditur eodem modo, quo precedens, dummodo loco ſphæræ circumſcriptæ, ſphæra inſcripta BEDF aſſumatur. Quevis igitur ſphærois &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) §. 81.
(b) Lib. I. §. 76.
(c) Lib. XIII. §. 43.
(d) Lib. I. §. 125.
(e) Lib. XIV. §. 110.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Omnis ſphærois adæquat cylindrum, cujus baſis ſit maximus circulus ipſius ſphæroidis, altitudo vero duos trientes axis contineat.

Fig. 14. T.XVII. 136. Ut, ſi baſis *mn* cylindri *ymnx* fuerit æqualis maximo circulo ſphæroidis *abcd*, altitudo vero *xn* adæquæt duos *trientes* axis *ac*, ſphærois *abcd* erit æqualis cylindro *ymnx*. Eſt enim cylindrus *yn* in ratione *ſubſeſquialtera* ad cylindrum *en* ipſi ſphęroidi circumſcriptum (a).

COROLLARIUM II.

Omnis ſphærois eſt dupla coni, cujus baſis ſit maximus circulus ipſius ſphæroidis, altitudo vero ejuſdem axis.

Fig. 14. T.XVII. 137. Si nimirum circulus *mn* baſeos coni *man* fuerit maximus circulus ſphæroidis *abcd*, ejuſque altitudo *ac* eadem cum axe ipſius ſphæroidis, aut illi æqualis, ſphærois *abcd* erit *dupla* coni *man*. Cum enim cylindrus *en* ſphæroidi circumſcriptus ſit ad ipſam ſphæroidem, ut 3 ad 2, ad conum vero *man*, utpote ejuſdem cum illo baſis, & altitudinis, ut 3 ad 1 (b), remanet, ſphæroidem *abcd* eſſe ad ipſum conum *man*, ut 2 ad 1 (c).

PROBLEMA IV.

Soliditatem ſphæroidis dimetiri.

138. Dimetiri oporteat ſphæroidem ABCD.

Re-

(a) Lib. XIII. §. 49.
(b) Lib. XIII. §. 31.
(c) §. 111.

Digitized by Google

Reſolutio.

Inveniatur valor circuli in ipſa ſphæroide maximi (a); iſque per duos *trientes* axis AC multiplicetur. Factum erit ſoliditas ipſius ſphæroidis ABCD. Ut ſi maximus circulus fuerit $= mn$, & axis $= p$, ſoliditas ſphæroidis ABCD erit $= \frac{2mnp}{3}$. Fig. 13. T.XVII.

Demonſtratio.

Quantitas enim $\frac{2mnp}{3}$ exprimit valorem cylindri; cui ſphærois ipſa eſt æqualis (b).

THEOREMA XV.

Sphæroides ſunt directe inter ſe, ut cylindri circumſcripti.

139. Sint duæ ſphęroides ABCD, *abcd*, quibus circumſcripti habeantur cylindri EN, *en*. Dico, ſphæroidem ABCD eſſe ad ſphæroidem *abcd*, ut eſt cylindrus EN ad cylindrum *en*.

Demonſtratio.

Cum enim omnis ſphærois ſit in ratione *ſubſeſquialtera* ad cylindrum ſibi circumſcriptum (c), ſphærois ABCD erit ad cylindrum EN, ut eſt ſphærois *abcd* ad cylindrum *en*. Igitur *alternando*, ſphærois ABCD erit ad ſphęroidem *abcd*, ut eſt cylindrus EN ad cylindrum *en* (d). Itaque ſphęroides &c. quod erat oſtendendum. Fig. 13. Fig. 14. T.XVII.

(a) Lib. X. §. 52. (b) §. 136. (c) §§. 134. 135. (d) Lib. I. § 125.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Sphæroides ſunt inter ſe in ratione compoſita ex ratione, quam habent circuli ipſarum maximi, & ex ratione axium.

140. Hæc enim eſt ratio cylindrorum ſphæroidibus ipſis circumſcriptorum (a); cum horum baſes ſint æquales maximis illarum circulis (b), eorumque altitudines ab ipſarum axibus non differant (c).

COROLLARIUM II.

141. Hinc, *ſi maximi circuli duarum ſphæroidum fuerint inter ſe, ut ipſarum axes reciproce, ſphæroides erunt æquales.*

COROLLARIUM III.

142. *Si vero maximi circuli duarum ſphæroidum fuerint æquales, ſphæroides erunt, ut axes; erunt autem, ut maximi circuli, ſi æquales fuerint axes.*

THEOREMA XVI.

Superficies ſphæroidum ſimilium ſunt in ratione duplicata axium.

143. Sint duæ ſphæroides ſimiles ABCD, *abcd*, quarum axes ſint AC, *ac*. Dico, ſuperficiem ſphæroidis ABCD eſſe ad ſuperficiem ſphæroidis *abcd* in ratione *duplicata* axis AC ad axim *ac*.

De-

(a) Lib. XIII. §. 17.
(b) §. 19.
(c) §. 18.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Quoniam ſuperficies ſphæroidis ABCD oritur ex completa revolutione ſemiperimetri elliptici ABC, quam metitur peripheria circuli BZD in ipſa ſphæroide maximi, nempe circuli alterius axis BD ellipſis generatricis, & ſuperficies ſphæroidis *abcd* fit ex completa revolutione ſemiperimetri elliptici *abc*, quam metitur integra peripheria circuli *azd* in ipſa ſphæroide maximi, videlicet cujus diameter eſt alter axis *bd* ellipſis generatricis, ſuperficies ſphæroidis ABCD erit ad ſuperficiem ſphæroidis *abcd*, ut productum, quod fit ex ductu primæ quatuor magnitudinum in ſecundam, ad productum, quod emergit ex multiplicatione tertiæ per quartam, nempe in ratione compoſita ex ratione primæ ad tertiam, & ex ratione ſecundæ ad quartam (a), videlicet in ratione compoſita ex ratione ſemiperimetri elliptici ABC ad ſemiperimetrum ellipticum *abc*, & ex ratione peripheriæ circuli BZD ad peripheriam circuli *bzd*. Semiperimeter autem ellipticus ABC, eſt ad ſemiperimetrum ellipticum *abc*, ut axis AC ad axim *ac* (b), & peripheria circuli BZD ad peripheriam circuli *bzd*, ut diameter BD ad diametrum *bd*, ſive ut alter axis ellipſis generatricis ABCD ad axim ſibi homologum ellipſis generatricis *abcd* (c). Ergo ſuperficies ſphæroidis ABCD erit ad ſuperficiem ſphæroidis *abcd* in ratione compoſita ex ratione axis AC ad axim *ac*, & ex ratione diametri BD ad diametrum *bd*. Conſtat autem, eſſe AC. *ac* = BD. *bd* (d), cum ellipſes generatrices ſint ſimiles (e). Ergo ſuperficies ſphæroidis ABCD eſt ad ſuperficiem ſphæroidis *abcd* in ratione axis AC ad axim *ac* ſemel ducta in ſeipſam. Hæc porro eſt ratio ipſorum axium *duplicata* (f). Igitur ſuperficies ſphæroidis ABCD eſt ad ſuperficiem ſphæroidis *abcd* in ratione *duplicata* axis AC ad axim *ac*. Superficies itaque &c. quod erat oſtendendum. Fig. 17. Fig. 14. T XVII.

(a) Lib. I. §. 169.
(b) §. 66.
(c) Lib. IX §. 155.
(d) §. 2.
(e) §. 20.
(f) Lib. I. §. 55.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

144. *Superficies ſphæroidum ſimilium ſunt in ratione duplicata ſuorum ſemiaxium*. Ratio ſiquidem ſemiaxium a ratione axium non eſt diverſa (a).

COROLLARIUM II.

Superficies ſphæroidum ſimilium ſunt inter ſe, ut quadrata ſuorum axium, & ſemiaxium.

145. Quadrata namque ſunt in ratione *duplicata* ſuorum laterum (b).

COROLLARIUM III.

146. *Axes ſphæroidum ſimilium ſunt in ratione ſubduplicata ſuperficierum earundem* (c).

THEOREMA XVII.

Sphæroides ſimiles ſunt in ratione triplicata ſuorum axium.

147. Sint duæ ſphæroides ſimiles ABCD, *abcd*, quarum axes ſint rectæ AC, *ac*. Dico, ſphæroidem ABCD eſſe ad ſphæroidem *abcd* in ratione *triplicata* axis AC ad axim *ac*.

Demonſtratio I.

Fig. 13. Fig. 14. T XVII. Sphæroides ABCD, *abcd* ſunt inter ſe, ut ſphæræ axium AC, *ac* (d). Hæ autem ſunt in ratione *triplicata* ipſorum axium (e). Ergo in eadem quoque ratione erunt ſphæroides ABCD, *abcd*.

De-

(a) Ibidem §. 126.
(b) Lib. IX. §. 172.
(c) Lib. I. §. 59.
(d) §. 92.
(e) Lib. XIII. §. 159.

Digitized by Google

Demonſtratio II.

Ex illarum geneſi. Cum enim ſphærois ABCD oriatur ex revolutione ſemiellipſis ABC circa axim AC, quam metitur peripheria circuli maximi BZD, & ſphærois *abcd* conſurgat ex revolutione ſemiellipſis ſimilis *abc* circa axim *ac*, quam metitur peripheria maximi circuli *bzd*, ſphærois ABCD erit ad ſphæroidem *abcd* in ratione compoſita ex ratione ſemiellipſis ABC ad ſemiellipſim ſibi ſimilem *abc*, & ex ratione peripheriæ circuli BZD ad peripheriam circuli *bzd*. Semiellipſis autem ABC eſt ad ſemiellipſim *abc* in ratione *duplicata* axis AC ad axim *ac* (a), adeoque etiam diametri BD ad diametrum *bd*; cum propter ſimilitudinem ellipſium, ex quibus rotantibus ſphæroides ipſæ producuntur, ſit BD . *bd* = AC . *ac* (b); & peripheria circuli BZD eſt ad peripheriam circuli *bzd*, ut diameter BD ad diametrum *bd* (c). Ergo ratio ſphæroidis ABCD ad ſphæroidem *abcd* eſt compoſita ex ratione axis AC ad axim *ac*, & ex eadem *duplicata*. Hæc autem eſt ratio ipſorum axium *triplicata* (d). Ergo &c. Itaque ſphæroides ſimiles &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

148. *Sphæroides ſimiles ſunt in ratione triplicata ſuorum ſemiaxium;* cum ratio ſemiaxium non ſit diverſa a ratione axium (e).

COROLLARIUM II.

Sphæroides ſimiles ſunt, ut cubi ſuorum axium, & ſemiaxium.

149. Etenim cubi ſunt in ratione *triplicata* ſuorum laterum (f).

CO-

(a) §. 73.
(b) §. 2.
(c) Lib. IX. §. 155.
(d) Lib. I. §. 55.
(e) Ibid. §. 126.
(f) Lib. XIII. §. 134.

Digitized by Google

COROLLARIUM III.

Si fuerint quatuor rectæ continuo geometrice proportionales, ſphærois, cujus axis ſit illarum prima, erit ad ſimilem ſphæroidem, cujus axis ſit earundem rectarum ſecunda, ut prima ad quartam.

150. Prima enim illarum rectarum eſt ad quartam in ratione *triplicata* primę ad ſecundam (a).

COROLLARIUM IV.

151. Axes, & ſemiaxes ſphæroidum ſimilium ſunt in ratione ipſarum *ſubtriplicata* (b).

THEOREMA XVIII.

Parabola eſt in ratione ſubſeſquialtera ad rectangulum ex ordinata in abſciſſam.

152. Eſto parabola BAC, ex cujus ordinata BC ad axim AF ducta in abſciſſam AF fiat rectangulum DBCE. Dico, parabolam BAC eſſe in ratione *ſubſeſquialtera* ad rectangulum DBCE.

Demonſtratio.

Ex quovis puncto *b* curvæ parabolicæ ducatur ad axim AF ſemiordinata *b*G occurrens lateri DB in M, & per punctum *b* agatur recta HL parallela axi AF, atque adeo etiam lateri DB. Puncta vero A, B jungantur recta AB. Quoniam igitur habetur DA = BF, & HA = *b*G (c), ſicuti quadratum ſemiordinatæ BF eſt ad quadratum ſemiordinatæ *b*G, ut abſciſſa AF ad abſciſſam AG (d), ita quadratum rectæ

Fig. 10. T. XVIII

(a) Lib. I. §. 177.
(b) Ibidem §. 39.
(c) Lib. VI §. 20.
(d) Lib. XV. §. 153.

Digitized by Google

ctæ DA erit ad quadratum rectæ HA, ut abſciſſa AF ad abſciſſam AG; cumque ſit HL = AF, & Hb = AG (a), quadratum rectæ DA erit ad quadratum rectæ HA, ut recta HL ad rectam Hb. Conſtat autem, eſſe DB. Ha = DA . HA (b); ac proinde quadratum rectæ DB ad quadratum rectæ Ha, ut quadratum rectæ DA ad quadratum rectæ HA (c). Igitur etiam quadratum rectæ DB erit ad quadratum rectæ Ha, ut eſt recta HL ad rectam Hb (d), & ideo quadratum quoque rectæ HL erit ad quadratum rectæ Ha, ut recta HL ad rectam Hb, ob æqualitatem ſcilicet rectarum HL, HB. Porro circuli ſunt inter ſe, ut quadrata ſuarum diametrorum (e). Igitur, ſi rectangulum DBFA, & triangulum BAD ſimul rotari concipiantur circa rectam immobilem DA, ut fiant cylindrus, & conus illi inſcriptus, recta HL erit ad rectam Hb, ut circulus genitus ex revolutione rectæ HL ad circulum productum ex rotatione rectæ Ha (f). Eodem modo oſtendam, rectam dN eſſe ad rectam dm, ut circulus, qui fit ex revolutione rectæ dN, ad circulum, qui ex revolutione rectæ *de* circa eandem rectam DA producitur; ac proinde omnia elementa DB, HL, dN &c. rectanguli DBFA ſimul ſumta eſſe ad omnia elementa itidem ſimul ſumta DB, Hb, dm &c. trilinei parabolici BbmAD, ut eſt ſumma omnium elementorum cylindri geniti ex revolutione rectanguli DBFA circa rectam DA ad ſummam omnium elementorum inſcripti coni producti ex triangulo BAD rotante circa eandem rectam DA, ſive rectangulum DBFA eſſe ad trilineum parabolicum BbmAD, ut eſt cylindrus ad conum ſibi inſcriptum. Cylindrus autem eſt ad inſcriptum ſibi conum in ratione tripla (g). Ergo etiam rectangulum DBFA erit triplum trilinei parabolici BbmAD; adeoque in ratione *ſeſquialtera* ad ſemiparabolam BAF. Igitur tota parabola BAC erit in ratione *ſubſeſquialtera* ad rectangulum DBCE; ac proinde parabola &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Lib. VI. §. 20.
(b) Lib. IX. §. 59.
(c) Lib. I. § 181.
(d) Lib I. §. 77.
(e) Lib. IX. §. 118.
(f) Lib. I. § 77.
(g) Lib. XIII. §. 81.

COROLLARIUM I.

Quavis parabola, cujus baſis ſit ordinata ad axim; adæquat rectangulum contentum ſub eadem ordinata, & ſub duobus trientibus axis.

153. Sic parabola BAC æquabit rectangulum B*nx*C contentum ſub eadem ordinata BC, & ſub recta C*x*, quæ duos *trientes* axis AF adæquat. Rectangulum quippe B*nx*C eſt, quemadmodum ipſa parabola, in ratione *ſubſeſquialtera* ad rectangulum DBCE (a).

COROLLARIUM II.

Parabola, cujus baſis ſit recta ordinata ad axim, eſt in ratione ſeſquitertia ad triangulum ſibi inſcriptum.

154. Videlicet parabola B*m*A*z*C, cujus baſis BC eſt ordinata ad ejuſdem axim AF, eſt in ratione *ſeſquitertia* ad triangulum ſibi inſcriptum BAC. Enimvero, cum rectangulum DBCE ſit ad parabolam B*m*A*z*C, ut 3 ad 2. (b); ad triangulum vero ABC, ut 3 ad $1\frac{1}{2}$ (c), remanet, parabolam B*m*A*z*C eſſe ad triangulum BAC, ut 2 ad $1\frac{1}{2}$ (d); quæ eſt ratio *ſequitertia*.

Fig. 10. T. XVIII.

PRO-

(a) Lib. IX §. 100.
(b) §. 152.
(c) Lib. IX. §. 89.
(d) §. 111.

Digitized by Google

PROBLEMA V.

Aream parabolæ, cujus baſis ſit recta ordinata ad axim, dimetiri.

155. Determinare oporteat aream parabolæ BAC, cujus baſis BC ſit recta ordinata ad ejuſdem axim AF.

Reſolutio.

Valor baſis BC multiplicetur per duos *trientes* axis AF. Productum, quod hinc emergit, erit area parabolæ BAC Fig. 10. T.XVIII Ut ſi baſis BC fuerit $= m$, & axis AF $= n$, area parabolæ BAC erit $= \frac{2mn}{3}$.

Demonſtratio.

Productum quippe $\frac{2mn}{3}$ exprimit valorem rectanguli, cui parabola BAC eſt æqualis (a).

THEOREMA XIX.

Parabolæ, quarum baſes ſint rectæ ordinatæ ad axim, ſunt directe inter ſe, ut rectangula, quæ fiunt ex ductu baſis in axim.

156. Sint duæ parabolæ BAC, *bac*, quarum baſes BC, *bc* ſint rectæ ordinatæ ad axim. Dico, parabolam BAC eſſe ad parabolam *bac*, ut eſt rectangulum DBCE ex baſi BC in axim AF ad rectangulum *dbce* ex baſi *bc* in axim *af*. Fig. 10. Fig. 11. T.XVIII

(a) §. 153.

Demonſtratio.

Parabola BAC eſt ad rectangulum DBCE, ut parabola *bac* ad rectangulum *dbce*, nimirum in ratione *ſubſeſquialtera* (a). Ergo parabola BAC erit ad parabolam *bac*, ut rectangulum DBCE ad rectangulum *dbce* (b). Itaque parabolæ &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Parabolæ, quarum baſes ſint recta ordinatæ ad axim, ſunt in ratione compoſita ex ratione axium, & baſium.

157. Sunt enim, ut rectangula ex baſibus in axes, quæ ſunt in ratione compoſita ſuarum baſium, & altitudinum (c).

COROLLARIUM II.

Si axes parabolarum, quarum baſes ſint ordinatæ ad axim, fuerint reciproce, ut baſes, parabolæ erunt æquales,

158. Circumſcripta enim rectangula ſunt hoc ipſo inter ſe æqualia (d).

COROLLARIUM III.

Si axes parabolarum fuerint æquales, parabolæ erunt, ut baſes. Erunt vero, ut axes, ſi æquales fuerint baſes.

159. Hoc enim modo ſe habent rectangula circumſcripta (e). THEO-

(a) § 152.
(b) Lib. I. §. 125.
(c) Lib. IX. §. 105.
(d) Ibid. §. 109.
(e) Lib. IX. §§. 95. 100.

Digitized by Google

THEOREMA XX.

Si in parabola, cujus baſis ſit ordinata ad axim, ducatur recta baſi parallela, parabola erit ad ſegmentum parabolicum in ratione triplicata axis ad axim.

160. In parabola *bac*, cujus baſis ſit recta *bc* ordinata ad axim *af*, ducatur recta *nz* ipſi baſi parallela, adeoque eidem axi ordinata. Dico, parabolam *bac* eſſe ad ſegmentum parabolicum *naz* in ratione *triplicata* axis *af* ad axim *ay*. Fig. 11. T. XVIII

Demonſtratio.

Cum enim ſit *bc*. *nz* = *bf*. *ny* (a), ſicuti axis *af* eſt ad axim *ay* in ratione *duplicata* ſemiordinatæ *bf* ad ſemiordinatam *ny* (b) ita iidem axes *af*, *ay* erunt in ratione *duplicata* ordinatarum *bc*, *nz*. Parabola autem *bac* eſt ad ſegmentum parabolicum *naz* in ratione compoſita ex ratione axis *af* ad axim *ay*, & ex ratione baſis *bc* ad baſim *nz* (c). Ergo parabola *bac* erit ad ſegmentum parabolicum *naz* in ratione compoſita ex ratione baſis *bc* ad baſim *nz*, & ex eadem ratione *duplicata*. Hæc autem eſt ratio eorundem axium *triplicata* (d). Ergo parabola *bac* eſt ad ſegmentum parabolicum *naz* in ratione *triplicata* axis *af* ad axim *ay*. Itaque, ſi in parabola &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

161. Hinc parabola *bac* erit ad ſegmentum parabolicum *naz*, ut cubus axis *af* ad cubum axis *ay*. Sunt enim cubi in ratione *triplicata* ſuorum laterum (e).

(a) Lib. I. §. 127.
(b) Lib. XV. §. 155.
(c) §. 157.
(d) Lib. I. §. 55.
(e) Lib. XIII. §. 134.

Digitized by Google

HYPOTHESIS III.

162. Conois parabolicus aſſumitur veluti compoſitus ex tot circulis parallelis, continuo verticem verſus decreſcentibus, ſibique mutuo ſuperimpoſitis, quot ſunt ſemiordinatæ ad axim parabolæ generatricis, atque adeo quot ſunt puncta in ipſo axe. In revolutione ſiquidem ſemiparabolæ B*m*A circa axim AE, unde emergit conois BACM, tot producuntur circuli conoidem ipſum conſtituentes, quot ſunt ſemiordinatæ ad ipſum axim, ac proinde quot puncta in ipſo axe numerantur.

Fig. 12. T. XVIII

THEOREMA XXI.

Conois parabolicus genitus ex revolutione ſemiparabolæ circum axim eſt in ratione ſubdupla ad cylindrum circumſcriptum.

Fig. 12. T. XVIII 163. Eſto conois parabolicus BACM genitus ex revolutione ſemiparabolæ BAE circum axim AE, eique circumſcriptus habeatur cylindrus DBMCF productus ex rotatione rectanguli DBEA circumſcripti circa eundem axim AE. Dico, conoidem parabolicum BACM eſſe ad cylindrum DBMCF in ratione *ſubdupla*, ſcilicet ut 1 ad 2.

Demonſtratio.

In plano rectanguli DBEA, in quo ſit etiam ſemiparabola generatrix BAE, ducatur recta G*e* parallela baſi BE, cujus proinde ſegmentum *be* ſit una ex ſemiordinatis ad axim AE in parabola, & jungantur in eodem plano puncta A, B recta AB. Quoniam igitur recta G*e* eſt æqualis rectæ BE (a), & ideo æqualia etiam earum quadrata (b), quadratum rectæ G*e* erit ad quadratum rectæ *be*, ut eſt quadratum rectæ

(a) Lib. VI. § 20. (b) Lib. I. §. 117.

Digitized by Google

ctæ BE ad quadratum ejuſdem *be* (a). Quadratum autem rectæ BE eſt ad quadratum rectæ *be*, ut abſciſſa AE ad abſciſſam A*e* (b), & ideo, ut recta BE ad rectam *ae* (c); cum ſit BE. *ae* = AE. A*e* (d). Ergo etiam quadratum rectæ G*e* erit ad quadratum rectæ *be*, ut recta BE ad rectam *ae*, ſive ut recta G*e* ad rectam *ae* (e). Circuli autem ſunt inter ſe, ut quadrata ſuorum radiorum (f). Igitur circulus G*y*H genitus ex revolutione rectæ G*e* in geneſi cylindri DBMCF erit ad circulum *bzd* productum ex revolutione ſemiordinatæ *be* in geneſi conoidis BACM, ut recta G*e* ad rectam *ae*, & ideo elementum *bzd* conoidis parabolici BACM eſt ad ſibi reſpondens elementum G*y*H cylindri DBMCF, ut eſt elementum *ae* trianguli BAE ad ſibi reſpondens elementum G*e* rectanguli DBEA. Eodem modo demonſtrabitur, elementum *mtx* conoidis eſſe ad elementum K*a*L cylindri, ut eſt elementum *nr* trianguli ad elementum K*r* rectanguli, atque ita de omnibus aliis reſpective. Igitur conois parabolicus BACM eſt ad ſibi circumſcriptum cylindrum DBMCF, ut eſt triangulum BAE ad rectangulum DBEA. Triangulum autem *BE A* eſt in ratione *ſubdupla* ad rectangulum *DBE*A (g). Ergo etiã conois parabolicus *B*ACM eſt in ratione *ſubdupla* ad cylindrum DBMCF; atque adeo conois &c quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Conois parabolicus adæquat cylindrum, cujus eadem ſit baſis, altitudo vero dimidiam axis partem adæquet.

164. Ut ſit altitudo KB cylindri KBMCL fuerit dimidia pars axis AE conoidis parabolici BACM, eademque utriuſque baſis BMC, conois BACM æquabit cylindrum KBMCL. Fig. 12. T. XVIII
Utrumque enim ſolidum eſt in eadem ratione, ſcilicet *ſubdupla*, ad cylindrum DBMCF ipſi conoidi circumſcriptum.

CO-

(a) Ibid. §. 102.
(b) Lib. XV. §. 153.
(c) Lib. I. §. 77.
(d) Lib. IX. §. 59.
(e) Lib. I. § 77.
(f) Lib. IX. § 181.
(g) Ibid. §. 89.

Digitized by Google

COROLLARIUM II.

Conois parabolicus eſt in ratione ſeſquialtera ad conum ſibi inſcriptum.

165. Conois nimirum parabolicus BACM erit in ratione *ſeſquialtera* ad conum ſibi inſcriptum *BnA*ACM, genitum ex revolutione trianguli rectanguli *BEA* circa eundem axin AE. Cylindrus enim D*B*MCF eſt ad conoidem *B*ACM, ut 3 ad $1\frac{1}{2}$. Idem autem cylindrus eſt ad conum *BnA*ACM, ut 3 ad 1 (a). Ergo conois *BACM* erit ad ipſum conum, ut $1\frac{1}{2}$ ad 1 (b), nempe in ratione *ſeſquialtera*.

COROLLARIUM III.

Elementa conoidis parabolici decreſcunt in ratione imminutæ altitudinis.

166. Manifeſtum namque eſt, in conoide parabolico *BmAxC* elementum circulare *BMC* eſſe ad elementum circulare *mtx*, ut quadratum radii *BE* ad quadratum radii *mr* (c), atqueadeo ut abſciſſa *AE* ad abſciſſam *Ar* (d), ſeu ut altitudo ad altitudinem.

SCHOLION.

167. Cum ergo conois parabolicus *BmAxC* ſit pars dimi-
Fig. 12. dia circumſcripti cylindri *DBMCF*, perſpicuum remanet,
T.XVIII *figuram tam planam, quam ſolidam, cujus elementa decreſcunt in ratione imminutæ altitudinis, eſſe partem dimidiam illius, cujus*

(a) Lib. XIII. §. 31.
(b) §. 111.
(c) Lib. IX. §. 188.
(d) Lib. XV. §. 155.

Digitized by Google

cujus elementa ejuſdem ſemper valoris perſeverant, dummodo eadem ſit utriuſque figuræ baſis, & altitudo. Manifeſtum quoque eſt, cur ſolidum genitum ex revolutione trianguli *BAE* circa latus EA ſit pars tertia ſolidi geniti ex revolutione rectanguli BEAD circa idem latus AE; ejuſdem vero ſolidi *DBMCF* ſit pars dimidia conois parabolicus productus ex revolutione ſemiparabolæ *BmAE* circa idem commune latus AE, quamvis triangulum BAE ſit pars dimidia rectanguli BDAE, ſemiparabola vero *BmAE* duos trientes ejuſdem rectanguli contineat, ejuſdemque circuli BMC peripheria horum omnium generantium planorum revolutionem metiatur. Hujus enim ratio eſt; quia elementa conoidis parabolici decreſcunt in ratione imminutæ altitudinis (a), at vero elementa coni in ratione *duplicata* imminutæ altitudinis minuuntur (b).

COROLLARIUM IV.

168. Solidum cavum productum in revolutione rectanguli DAEB circa latus AE a trilineo parabolico *BmbAD* eſt æquale conoidi parabolico *BbAdC*. Eſt enim pars dimidia cylindri *DBMCF* hoc ipſo nempe, quod pars dimidia ipſius cylindri *DBMCF* ſit conois parabolicus *BmAxCM*. Fig. 11. T. XVIII

PROBLEMA VI.

Conoidis parabolici ſoliditatem dimetiri.

169. Eſto conois parabolicus *bacm*, cujus ſoliditatem dimetiri oporteat.

Reſolutio.

Circulus baſeos *bmc* per axim *ae* multiplicetur, & factum per 2 dividatur. Quotus erit valor conoidis parabolici *bacm* quæſitus. Ut ſi circulus baſis *bmc* fuerit $= dr$, & altitudo $ae = p$, conois parabolicus *bacm* erit $= \frac{drp}{2}$. Fig. 11. T. XVIII

De-

(a) §. 166. (b) Lib. XI. §. 101.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Factum quippe *drp* eſt valor cylindri *dbmcf* (a), cujus una pars dimidia eſt ipſe conois *bacm* (b).

THEOREMA XXII.

Conoides parabolici ſunt inter ſe, ut cylindri circumſcripti.

170. Sint duo conoides parabolici BAC, *bac*, quibus circumſcripti habeantur cylindri DC, *dc*. Dico, conoidem BAC eſſe ad conoidem *bac*, ut eſt cylindrus DC ad cylindrum *dc*.

Demonſtratio.

Eſt enim conois BAC ad cylindrum DC, ut conois *bac*
Fig. 12. Fig. 13. T. XVIII. ad cylindrum *dc* (c). Ergo conois BAC erit ad conoidem *bac*, ut cylindrus DC ad cylindrum *dc* (d). Itaque conoides parabolici &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

171. *Conoides parabolici ſunt inter ſe in ratione compoſita ex ratione baſium, & ex ratione axium, ſive altitudinum.*

COROLLARIUM II.

172. Hinc *conoides parabolici erunt æquales, ſi baſes fuerint reciproce, ut axes.*

COROLLARIUM III.

173. *Conoides parabolici erunt, ut baſes, ſi æquales fuerint*
axes;

(a) Lib. XI. §. 87.
(b) §. 163.
(c) Ibidem.
(d) Lib. I. §. 125.

axes; erunt vero, ut axes, ſi æquales fuerint baſes. Hæc enim omnia competunt cylindris circumſcriptis (a).

THEOREMA XXIII.

Si conois parabolicus ſecetur plano baſi parallelo, conois parabolicus erit ad ſegmentum conoidale in ratione duplicata axium.

174. Conois parabolicus *bac* ſecetur plano *nx* parallelo baſi *bmc*. Dico, conoidem parabolicum *bac* eſſe ad ſegmentum conoidale *nax* in ratione *duplicata* axis *ae* ad axim *ay*.

Demonſtratio.

Conois parabolicus *bac* eſt ad ſegmentum *nax* in ratione compoſita ex ratione baſis *bmc* ad baſim *nx*, & ex ratione axis *ae* ad axim *ay* (b). Baſis autem ſive circulus *bmc* eſt ad baſim, ſive ad circulum *nx*, ut axis *ae* ad axim *ay* (c), cum circuli ſint, ut quadrata radiorum *be*, *ny* (d), quæ ſunt, ut abſciſſæ *ae*, *ay* (e). Ergo ratio conoidis *bac* ad ſegmentum *nax* erit ratio axis *ae* ad axim *ay* ſemel ducta in ſe ipſam. Hæc autem eſt ratio ipſorum axium *duplicata* (f). Ergo conois *bac* eſt ad ſegmentum conoidale *nax* in ratione *duplicata* axis *ae* ad axim *ay*. Itaque ſi conois &c. quod erat oſtendendum. Fig. 13. T. XVIII

COROLLARIUM.

175. Quamobrem conois parabolicus *bac* erit ad ſegmentum *nax*, ut quadratum axis *ae* ad quadratum axis *ay* (g).

(a) Lib. XIII. §§. 43. 49.
(b) §. 171.
(c) Lib. I §. 76.
(d) Lib. IX. §. 188.
(e) Lib. XV. §. 153.
(f) Lib. I. §. 55.
(g) Lib. IX. §. 172.

Digitized by Google

SCHOLION.

176. Vides ergo, majorem proportionem inter ſe habere plana *bae*, *uay*, ex quibus rotantibus circum axim *ae* producuntur ſolida *baem*, *uaz*, quam ipſa ſolida genita. Illa namque plana ſunt in ratione *triplicata* axium *ae*, *ay* (a); ſolida vero in ratione eorundem *duplicata* (b).

HYPOTHESIS IV.

177. Curva tam parabolica, quam hyperbolica aſſumitur veluti compoſita ex innumeris lineolis magnitudinis infinite parvæ, videlicet adeo exiguis, ut earum quælibet ſit minor quavis aſſignabili quantitate.

THEOREMA XXIV.

Si ſemiaxis tranſverſus GA hyperbolæ æquilateræ CBA fuerit ſemiparameter parabolæ DaA, ductaque ex centro G recta GE ordinatis parallela, agatur per quodvis punctum B curvæ hyperbolicæ recta DBE parallela axi, quæ occurrat curvæ parabolicæ DaA in puncto D, & rectæ GE in puncto E, ſpatium, ſive trapezium hyperbolicum AbBEG æquabit rectangulum ex ſemiaxe, ſeu ſemiparametro AG curvæ parabolicæ in ipſam curvam AaD.

178. Per punctum D curvæ parabolicæ AaD ducta intelligatur tangens DP occurrens axi in puncto P, in qua ſumta particula infinite parva Da, atque adeo hujuſmodi, ut ſit quoque una ex illis, quæ conſtituunt curvam ipſam parabolicam DaA, agatur per punctum *a* recta *d*N parallela rectæ

Fig. 14. T. XVIII

(a) §. 160.
(b) §. 174.

rectæ ED, & per puncta B, D ducantur ad axim ſemiordinatæ BM, DK, nec non ex puncto contactus D recta DN perpendicularis tangenti DP.

Demonſtratio.

Quoniam ex conſtructione quadrilaterum EBMG eſt parallelogrammum, rectæ BM, EG erunt æquales (a); adeoque æqualia itidem erunt ipſarum quadrata. In hyperbola autem CBA rectangulum ex tota FM in abſciſſam AM eſt æquale quadrato ſemiordinatæ BM (b). Ergo idem rectangulum æquale itidem erit quadrato rectæ EG (c); ac propterea rectangulum ex FM in AM una cum quadrato rectæ GA, erit æquale quadrato rectæ EG una cum quadrato rectæ GA (d). Quadratum porro rectæ GM adæquat rectangulum ex FM in AM una cum quadrato rectæ GA (e). Igitur quadratum rectæ GM erit æquale quadratis rectarum EG, GA ſimul ſumtis (f); adeoque etiam quadrato rectæ EA (g). Quamobrem rectæ GM, EA erunt æquales (h). Rurſus, cum in parallelogrammo EDKG rectæ DK, EG ſint æquales (i), & ſubnormalis KN in parabola adæquet ſemiparametrum, nempe ex conſtructione rectam GA (*k*), & anguli DKN, EGA in triangulis DKN, EGA ſint æquales, utpote recti, baſis quoque DN æquabit baſim EA (l); eritque propterea recta DN æqualis rectæ GM (m), & ideo etiam rectæ EB, cum in parallelogrammo EBMG duæ EB, GM ſint æquales. Preterea, quoniam in triangulo rectangulo NDP duo triangula NDK, KDP determinata a perpendiculari DK ſint ſimilia (n); ſicuti etiam duo D*da*, DKP (o), ob paralleliſmum ſcilicet rectarum *da*, KP, ſibi quoque mutuo ſimilia erunt triangula DNK, D*da* (p); habebuntque latera circa æquales angulos proportionalia (q), videlicet

 erit

(a) Lib. VI. §. 20.
(b) Lib. XV. §. 217.
(c) Syn. Alg. §. 261.
(d) Ibid. §. 265.
(e) Lib. XV §. 246.
(f) Syn. Alg. §. 261.
(g) Lib. VI. §. 37.
(h) Lib. I. §. 187.
(i) Lib. VI. §. 20.
(k) Lib. XV. §. 174.
(l) Lib. V. §. 73.
(m) Syn. Alg. §. 261.
(n) Lib. IX. §. 73.
(o) Ibidem §. 65.
(p) Ibidem §. 35.
(q) Ibidem §. 1.

Digitized by Google

erit DN. NK = *a*D. D*d*; cumque, ut jam demonſtravimus, ſit EB = DN, & in parallelogrammo B*ed*D habeatur B*e*=D*d*(a), ſitque inſuper GA=KN, erit quoque EB. GA = *a*D. B*e*. Quamobrem rectangulum ex EB in B*e* æquabit rectangulum ex GA in *a*D (b). Rectangulum autem EB×B*e* diverſum non eſt a rectangulo ex EB in particulam B*b* curvæ hyperbolicæ CBA; cum rectæ EB, N*b*, utpote infinite ſibi proximæ, ſpectari poſſint, ut inter ſe æquales. Ergo rectangulum quoque ex EB in particulam B*b* curvæ hyperbolicæ CBA erit æquale rectangulo ex ſemiparametro G*A* in particulam D*a* curvæ parabolicæ D*a*A. Eodem ratiocinio demonſtrabitur, rectangulum ex recta N*b* in particulam infinite parvam *bx* curvæ hyperbolicæ B*b*A æquare rectangulum ex ſemiparametro GA in particulam infinite parvam *ay* curvæ parabolicæ D*a*A; atque ita de ſingulis. Ergo ſpatium, ſive trapezium hyperbolicum GEB*b*A erit æquale rectangulo contento ſub curva parabolica D*a*A, & ſub illius ſemiparametro GA. Itaque, ſi ſemiaxis &c. quod erat oſtendendum.

HYPOTHESIS V.

179. Quemadmodum conois parabolicus; ita conois hyperbolicus conſideratur veluti compoſitus ex tot circulis ſibi mutuo ſuperimpoſitis, adeoque inter ſe parallelis, verticem verſus continuo decreſcentibus, quot ſunt ſemiordinatæ ad axim in ſemihyperbola generatrice, ſeu quot ſunt puncta in ipſo axe.

De-

(a) Lib. VI. §. 20.
(b) Lib. IX. § 107.

Digitized by Google

THEOREMA XXV.

Conois hyperbolicus BACE *genitus ex revolutione ſemihyperbolæ* BnA *circa axim* AE, *cujus latus rectum* AF *ſit duplum tranſverſi* DA, *adæquat ſegmentum ſphæricum* aEb *ejuſdem altitudinis* AE *productum ex revolutione ſemiſegmenti* anEA *circuli* HaEb, *cujus radius ſit recta* DE *compoſita ex tranſverſo axe* DA, *&* *ex abſciſſa* AE.

180. Sumto in axe AE, quovis puncto *e*, ducatur in ſemihyperbola generatrice B*n*A ſemiordinata *ne*. Tum centro D, intervallo D*e*, deſcribatur circulus G*dem*.

Demonſtratio.

Quoniam quadratum ſemiordinatæ BE eſt ad rectangulum ex DE in AE, ut parameter AF ad axim tranſverſum AD(a), quadratum ſemiordinatæ BE erit duplum rectanguli ex DE in AE, ſicuti parameter AF eſt duplus axis tranſverſi AD per hypotheſim. Rectangulum autem ex HE in AE eſt duplum rectanguli ex DE in AE; cum ſit HE×AE. DE×AE=HE. DE (b). Ergo rectangulum ex HE in AE erit æquale quadrato ſemiordinatæ BE (c). Ducta autem chorda *a*E, conſtat, rectangulum ex HE in AE æquare quadratum rectæ *a*E (d), cum ſit ÷ HE . *a*E . AE (e). Igitur quadratum ſemiordinatæ BE quadrato itidem chordæ *a*E erit æquale (f). Quamobrem etiam circulus, cujus radius ſit recta BE, æquabit circulum, cujus radius eſt recta *a*E (g). Circulus autem radii *a*E adæquat ſuperficiem ſegmenti ſphærici *an*E*xb* (h). Igitur circulus quoque ſemiordinatæ BE eandem ſuperficiem ſphærici ſegmenti *an*E*xb* æquabit (i). Eodem modo oſtendam, circulum deſcriptum ex ſemiordinata Fig. 15. T. XVIII

en

(a) Lib. XV. §. 203.
(b) Lib. IX §. 100.
(c) Lib. I. §. 103.
(d) Lib. IX. §. 111.
(e) Ibidem §. 74.
(f) Syn. Alg. § 261.
(g) Lib. IX. §. 188.
(h) Lib. XIV. §. 84.
(i) Syn Alg. §. 262.

em æquare ſuperficiem ſegmenti ſphærici productam ex revolutione arcus *de* circa eundem axim AE, atque ita de ceteris. Ergo conois hyperbolicus BACE adæquat ſegmentum ſphæricum *aEb;* cum omnia elementa unius ſint æqualia omnibus elementis alterius, alterum alteri, quæ ſibi muto reſpondent. Conois itaque hyperbolicus &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM

181. Si ergo conois hyperbolicus BAC ſecetur plano *nx* baſi BC parallelo, ſegmentum *n*A*x* conoidis BAC erit ad totum ipſum conoidem, ut eſt ſegmentum ſphæricum *dem* ad ſegmentum ſphæricum *a*E*b*. Quandoquidem, ſicuti totus conois BAC adæquat ſegmentum ſphæricum *a*E*b*, ita ſegmentum conoidale *n*A*x* ſegmento ſphærico *dem* eſt æquale.

PROBLEMA VII.

Dimetiri ſoliditatem conoidis hyperbolici geniti ex revolutione hyperbolæ, cujus parameter ſit duplus axis tranſverſi.

182. Eſto conois hyperbolicus BAC genitus ex revolutione ſemihyperbolæ BAE, cujus parameter AF ſit duplus tranſverſi axis DA. Hujus ergo conoidis ſoliditatem dimetiri oporteat. Fig. 15. T. XVIII

Reſolutio.

Ducta tangente *ab* per verticem A, centro D, intervallo DE deſcribatur ſegmentum circulare *a*E*b*. Tum inveniatur valor ſegmenti ſphærici geniti ex revolutione ipſius ſegmenti circularis *a*E*b* circa radium DE (a). Is erit valor conoidis hyperbolici BAC quæſitus.

De-

(e) Lib XIV. §.120.

Demonſtratio.

Patet ex §. 180.

L E M M A XII.

Corona eſt ad circulum, ut rectangulum coronæ ad quadratum radii ipſius circuli.

183. Eſto corona *exyz* comprehenſa peripheriis circulorum concentricorum HAKB, ECFD, per quorum commune centrum G ducatur diameter AB. Dico, coronam *exyz* eſſe ad quemcumque alium circulum *ad*, ut eſt rectangulum ex AC in CB, quod ipſius coronæ rectangulum vocatur, ad quadratum radii *ab* ipſius circuli *ad*. Fig. 17. Fig. 16. T. XVIII

Demonſtratio.

Quoniam circulus HAKB eſt ad circulum ECFD, ut quadratum radii AG ad quadratum radii CG (a), *dividendo*, circulus HAKB *minus* circulo ECFD erit ad circulum ECFD, ut eſt quadratum radii AG *minus* quadrato radii CG ad quadratum ipſius radii CG (b). Corona autem *exyz* eſt exceſſus circuli HAKB ſupra circulum ECFD, & rectangulum ex AC in CB eſt exceſſus quadrati radii AG ſupra quadratum radii CG (c). Ergo corona *exyz* erit ad circulum ECFD, ut rectangulum ex AC in CB ad quadratum radii CG. Circulus autem ECFD eſt ad circulum *ad*, ut quadratum radii CG ad quadratum radii *ab* (d). Igitur *ex æquo ordinate* corona *exyz* eſt ad circulum *ad*, ut rectangulum ex AC in CB ad quadratum radii *ab* (e). Itaque corona &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Lib. IX. §. 18?.
(b) Lib. I §. 135.
(c) Lib. XV. §. 49.
(d) Lib. IX. §. 188.
(e) Lib. I §. 170.

COROLLARIUM

184. Si ergo rectangulum ex AC in CB fuerit æquale quadrato radii *ab*, etiam corona *exyz*, producta in rotatione radii GA circa centrum G ab ejus ſegmento AC, erit æqualis circulo *ad* (a).

THEOREMA XXVI.

Si hyperbola ABC revolvatur cum aſymptotis DE, DF circa axim DB, ſolidum cavum genitum a rotante trapezio hyperbolico EGBA adæquat cylindrum productum a rotante rectangulo GxeB.

185. Ducantur tot ordinatę AC, *ab* ad axim B*e*, quot ſunt puncta in ipſo axe, ipſæque ad *aſymptotos* uſque producantur.

Demonſtratio.

Cum rectangulum ex L*a* in *a*M ſit æquale quadrato rectæ GB(b), ac proinde etiam quadrato rectæ *dy*, corona
Fig. 18. T. XVIII L*e*M*ba* producta a rotante ſegmento L*a* æquabit circulum *dc* genitum in revolutione radii *dy*(c). Eadem ratione corona E*n*FC*m*A, quæ in illa rotatione fit a ſegmento EA, erit æqualis circulo *xz*, cujus radius eſt recta *xe*, atque ita de ceteris, nimirum quælibet corona conſtituens ſolidum cavum genitum a rotante trapezio hyperbolico EGBA, erit æqualis correſpondenti ſibi circulo, qui conſtituit cylindrum productum a rotante rectangulo G*xe*B. Ergo ſolidum illud cavum adæquat ipſum cylindrum. Itaque, ſi hyperbola &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Lib. I. §. 45. (b) Lib. XV. ex dem. §. 274. (c) §. 184.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

186. Hinc conois hyperbolicus productus a ſemihyperbola AB*e* rotante circum axim B*e*, eſt æqualis annulo triangulari genito in illa revolutione a triangulo rectangulo E*x*G. Conſtat enim, conoidem ipſum una cum ſolido cavo, quod fit a rotante trapezio EGBA, æquare cylindrum G*xz*H una cum annulo triangulari, quod producitur a rotante triangulo E*x*G. Oſtenſum eſt autem, ſolidum illud cavum æquare cylindrum G*xz*H. Ergo conois hyperbolicus ABC*m* æquabit annulum triangularem genitum a rotante triangulo E*x*G (a).

PROBLEMA VIII.

Dimetiri conoidem hyperbolicum genitum ab hyperbola intra aſymptotos.

187. Dimetiri oporteat conoidem hyperbolicum ABC*m* productum ex revolutione hyperbolæ ABC intra *aſymptotos* DE, DF.

Reſolutio.

Ex invento valore coni EDF*n* geniti ex revolutione trianguli rectanguli E*e*D circa latus D*e* (b), ſubducatur valor tum coni GDH producti a rotante triangulo rectangulo GBD, tum valor cylindri G*xz*H facti ex revolutione rectanguli H*xe*B (c). Reſiduum erit ſoliditas conoidis hyperbolici ABC*m*. Fig. 18. T. XVIII. Ut ſi ſoliditas coni EDF*n* fuerit $= amn$, ſoliditas coni GDH $= byx$, & ſoliditas cylindri G*xz*H $= dpz$, conois hyperbolicus ABC*m* erit $= amn - byx - dpz$.

(a) Synop. Algeb. §. 266.
(b) Lib. XIV. §. 97.
(c) Ibid. §§. 91. 97.

Demonſtratio.

Quantitas enim $amn - byx - dpz$ exprimit valorem annuli producti in illa rotatione a triangulo ExG, cui conois ipſe eſt æqualis (a).

L E M M A XIII.

Si in plano aſymptotico ABMNDC, *curva hyperbolæ æquilateræ* ABM, *ejuſque aſymptotis* ND, DC *comprehenſo, ducantur rectæ quotcunque* BE, dc, fm *parallelæ aſymptoto* CD, *cylindricæ ſuperficies genitæ ab illis rectis lineis in revolutione illius plani circa aſymptotum* CD, *ſunt omnes inter ſe æquales.*

188. Ex punctis B, *d*, *f* agantur rectæ BH, *dn*, *fp* parallelæ *aſymptoto* ND, unde conſtituta habeantur rectangula BD, *d*D, *f*D.

Demonſtratio.

Fig. 19. T. XVIII Rectangulum BD adæquat rectangulum *d*D, ſicuti etiam rectangulum *f*D, ſeu tria rectangula BD, *d*D, *f*D ſunt inter ſe æqualia (b). Cylindricæ autem ſuperficies productæ a rectis BE, *dc*, *fm* in revolutione rectangulorum BD, *d*D, *f*D circa latus *p*D, ſunt *directe* inter ſe, ut ipſa rectangula BD, *d*D, *f*D (c). Ergo ipſæ quoque cylindricæ ſuperficies ſunt inter ſe æquales. Itaque ſi in plano &c. quod erat oſtendendum.

HYPOTHESIS VI.

189. Cum planum *aſymptoticum* A*d*BEDC conſiderari queat ve-

(a) §. 186. (b) Lib. XV. §. 291. (c) Lib. XIV. §. 45.]

veluti compoſitum ex tot rectis BE, *dc*, *fm* parallelis *aſymptoto* DC, quot ſunt puncta in *aſymptoto* ED, ſolidum hyperbolicum ABEGFP, genitum ex revolutione plani A*d*BEDC circa *aſymptotum* CD, aſſumi poteſt, veluti conſurgens ex tot cylindricis ſuperficiebus ſibi mutuo intro poſitis, atque communem axim CD habentibus, quot ſunt rectæ conſtituentes *aſymptoticum* ſpatium A*d*BEDC. Harum enim rectarum quęlibet in illa ipſius plani revolutione cylindricam ſuperficiem deſcribit. Cylindrus quoque BEXGE productus ex revolutione rectanguli HBED circa latus HD poteſt ſpectari veluti compoſitus ex tot cylindricis ſuperficiebus ſibi mutuo intro poſitis, quot ſunt rectæ BE, *ac*, *bm* parallelæ lateri HD, ſeu quot itidem ſunt puncta in latere ED, ac proinde quot ſunt cylindricæ ſuperficies conſtituentes totum ſolidum hyperbolicum ABEXGFP. Fig. 19. T. XVIII

THEOREMA XXVII.

Si inter curvam MBA hyperbolæ æquilateræ, ejuſque aſymptotos ND, DC inſcriptum ſit rectangulum HBED, quod ſimul cum aſymptotico plano ABEDC circa aſymptotum CD revolvatur, ſolidum hyperbolicum ABEXGFP genitum ex revolutione totius plani ABEDC erit duplum cylindri BEXGF producti ex revolutione rectanguli HBED.

190. In plano *aſymptotico* ABEDC ducantur rectæ quotcunque *dc*, *fm* parallelæ *aſymptoto* CD, & in rectangulo HBED diagonalis BD. Fig. 19. T. XVIII

Demonſtratio.

Quoniam ſuperficies cylindrica producta in illa revolutione plani *aſymptotici* ABEDC a recta *dc* adæquat ſuperficiem cylindricam genitam in eadem revolutione a recta BE (a), ſuperficies cylindrica producta a tota *dc* erit ad ſuperfi-

(a) §. 188.

ciem cylindricam productam ab ejus ſegmento *ac*, ut eſt ſu-ſuperficies cylindrica producta a recta BE ad ipſam cylindricam ſuperficiem genitam a recta *ac* (a). Superficies autem cylindrica producta a recta BE eſt ad ſuperficiem cylindricam productam a recta *ac*, ut eſt radius DE ad radium D*c* (b), & ut radius DE ad radium D*c*, ita eſt recta BE, ſeu *ac* ad rectam *xc* (c). Ergo ſuperficies quoque cylindrica genita a recta *dc* erit ad ſuperficiem cylindricam productam a recta *ac*, ut eſt recta *ac* ad rectam *xc* (d). Eodem modo demonſtrabitur, ſuperficiem cylindricam productam *in illa* rotatione a recta *fm*, eſſe ad ſuperficiem cylindricam productam a recta *bm*, ut eſt recta *bm* ad rectam *xm*; atque ita de ſingulis. Igitur omnes ſuperficies cylindricæ conſtituentes ſolidum hyperbolicum ABEXGFP ſimul ſumtæ ſunt ad omnes illas cylindricas ſuperficies, quæ conſtituunt cylindrum BEXGF, ut ſunt omnia elementa rectanguli HBED ad omnia elementa trianguli BDE; ac proinde ſolidum illud hyperbolicum erit ad ipſum cylindrum, ut eſt rectangulum HBED ad triangulum BED. Rectangulum autem HBED eſt duplum trianguli BED (e). Ergo etiam ſolidum ipſum hyperbolicum erit duplum cylindri BEXGF. Itaque ſi inter curvam &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

191. Hinc *dividendo*, ſolidum hyperbolicum productum ex revolutione ſpatii *aſymptotici* ABHC circa *aſymptotum* CD erit æquale cylindro genito in illa revolutione a rectangulo HBED, cui ſolidum ipſum hyperbolicum incumbit Similiter ſolidum hyperbolicum productum a rotante ſpatio *aſymptotico* A*dn*C æquabit cylindrum, qui in revolutione rectanguli *ndc*D efficitur, atque ita deinceps.

SCHO-

(a) Lib. I. §. 102
(b) Lib. XIV. §. 17.
(c) Lib. I. §. 59
(d) Lib. I. §. 77.
(e) Lib. VI. §. 21.

Digitized by Google

SCHOLION.

192. Solidum hyperbolicum, quod eſt æquale cylindro BEMGF, neceſſario eſt infinites longum. Ut enim determinentur omnes ſuperficies cylindricæ, quæ illud ſolidum conſtituunt, correſpondentes illis cylindricis ſuperficiebus, ex quibus cylindrum BEXGF conſtare diximus, debet curva hyperbolica B*d*A eſſe infinite proxima *aſymptoto* DC, ſeu harum linearum extrema A, C debent eſſe adeo ſibi proxima, ut eorum diſtantia a ſe mutuo pro nulla haberi queat: quod profecto haberi haud poteſt, niſi curva hyperbolica B*d*A, ejuſque *aſymptotus* DC in infinitum producantur. Remanet ergo, ſolidum infinites longum æquare ſolidum undequaque finitum.

THEOREMA XXVIII.

Solidum hyperbolicum infinities longum, productum ex revolutione plani aſymptotici BACH, eſt ad ſolidum hyperbolicum infinities itidem longum genitum ex revolutione plani aſymptotici d*ACn, ut radius BH ad radium* dn *ſuarum baſium circularium.*

193. Ductis rectis BE, *dc* parallelis *aſymptoto* CD, conſtituta habeantur rectangula BEDH, *dc*D*n*.

Demonſtratio.

Cum cylindri ſint inter ſe in ratione compoſita ex ratione ſuarum altitudinum, & ex ratione circulorum ſuarum baſium (a), cylindrus genitus ex revolutione rectanguli HBED erit ad cylindrum productum ex revolutione rectanguli *dc*D*n* in ratione compoſita ex ratione rectæ BE ad rectam *dc*, & ex ratione circuli ex radio DE ad circulum Fig. 19. T.XVIII

(a) Lib. XIII. §. 57.

culum ex radio D*c*. Eſt autem D*c*. DE = BE. *dc* (a); & circuli ſunt inter ſe, ut quadrata ſuorum radiorum (b). Ergo cylindrus genitus ex rotante rectangulo HBED erit ad cylindrum productum ex rotante rectangulo *dc*D*n* in ratione compoſita ex ratione rectæ D*c* ad rectam DE, & ex ratione quadrati rectæ DE ad quadratum rectæ D*c*. Quamobrem poſita recta DE = *a*, & recta D*c* = *d*, fractio $\frac{daa}{add}$ deſignabit rationem cylindri ex rotante rectangulo HBED ad cylindrum ex rotante rectangulo *dc*D*n*, cum ſcilicet rationem exprimat compoſitam ex ratione magnitudinis *d* ad magnitudinem *a*, & ex ratione quadrati *aa* ad quadratum *dd* (c). Eſt autem $\frac{daa}{add} = \frac{a}{d}$ (d). Ergo cylindrus ex rotante rectangulo HBED erit ad cylindrum ex rotante rectangulo *dc*D*n*, ut magnitudo *a* ad magnitudinem *d*, nempe ut DE ad D*c*, ſeu ut HB ad *nd*, ex eo nimirum quod ſit HB = DE, & *nd* = D*c* (e). Conſtat porro, ſolidum hyperbolicum infinities longum genitum ex revolutione plani BACH æquare cylindrum ex rotante rectangulo HBED, & ſolidum hyperbolicum infinities itidem longum productum ex revolutione plani *d*AC*n* æquare cylindrum ex rotante rectangulo *dc*D*n* (f). Ergo ipſa quoque ſolida hyperbolica erunt directe inter ſe, ut radii HB, *nd* ſuarum baſium circularium. Itaque ſolidum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM.

194. Diviſa propterea *aſymptoto* DG in partes æquales D*u*, *uy*, *y*G, ductiſque rectis *u*R, *y*S, GF parallelis *aſymptoto* DC, necnon rectis R*p*, S*n*, FH parallelis *aſymptoto* DG, ſi

(a) Lib. XV. §. 293.
(b) Lib. IX. §. 188.
(c) Lib. I. §. 6. & §. 168.
(d) Syn. Alg. §. 73., & lib. I. §. 104.
(e) Lib. VI. §. 20.
(f) §. 191.

ſi planum *aſymptoticum* DCREG ad partem CP infinities longum circa *aſymptotum* DC revolvatur, exceſſus ſolidorum, quæ generantur ex rotantibus planis HCPF, *nCPS*, *pCPR*, erunt æqualia. Enimvero, cum totum ſolidum ex *HCPF* ſit ad totum ſolidum ex *nCPS*, ut radius HF ad radium *nS*, ſive ut DG ad *Dy*, ſicuti etiam totum ſolidum ex *nCPS* ad totum ſolidum ex *pCPR* infinities longum, ut radius *nS* ad *pR*, ſive ut *Dy* ad *Du*, exceſſus ipſorum ſolidorum erunt inter ſe, ut exceſſus linearum *DG*, *Dy*, *Du* (a). Exceſſus autem harum linearum ſunt æquales per hypotheſim. Ergo æquales itidem erunt exceſſus illorum ſolidorum (b) adeoque &c.

ELE-

(a) Lib. I. §. 153. (b) Ibidem § 45.

Digitized by Google

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM
LIBER XVII.
De figuris iſoperimetris.

De *figuris iſoperimetris* agit Pappus lib. V. *Collect. Mathematicarum*, & Clavius tum in *Commentariis* ſuper cap. 1. Sphæræ Joannis de Sacro Boſco, tum lib. VII. *Geometriæ Practicæ*. Quæ igitur hac de re ſcitu magis digna nobis viſa ſunt, hic exhibemus.

DEFINITIO.

1 *Figuræ iſoperimetræ dicuntur illæ, quarum perimetri, ſive ambitus ſunt inter ſe æquales*. Ut ſi tria latera trianguli ABC æqualia fuerint quatuor lateribus quadrilateri ABCD,
Fig. 2. Fig. 1. T.XIX. duo hujuſmodi plana rectilinea erunt ſibi mutuo *iſoperimetra*. Idipſum dicito de ſolidis, videlicet ea eſſe *iſoperimetra*, quæ æqualibus ſuperficiebus continentur, quantumvis genere diverſa inter ſe mutuo illa fuerint.

THEOREMA I.

Triangulorum iſoperimetrorum eandem baſim habentium, quod eſt iſoſceles, majorem habet aream.

2. Super eandem baſim AC deſcripta habeantur duo triangula *iſoperimetra* ABC, ADC, quorum ABC ſit iſo-
Fig. 1. T.XIX. ſceles. Dico, aream trianguli ABC eſſe majorem area trianguli ADC.

De-

Demonſtratio.

Latere AB in directum producto, ſumatur ſegmentum BF æquale lateri AB, atque adeo etiam lateri BC, & jungantur puncta D, F recta DF, & puncta B, D recta BD. Quoniam igitur duo latera AD, DF majora ſunt reliquo AF (a), cui duo AB, BC poſita ſunt æqualia, duo latera AD, DF majora erunt duobus AB, BC. Duo autem latera AD, DC ſunt ex hypotheſi æqualia duobus AB, BC. Ergo duo AD, DF duobus quoque AD, DC erunt majora (b); ſublatoque idcirco communi AD, reliquum DF majus erit reliquo DC (c). Itaque baſis DF trianguli DBF excedit baſim DC trianguli DBC. Duo autem iſta triangula habent latera BF, BC æqualia, & latus BD eſt utrique commune. Ergo angulus FBD erit major angulo DBC (d); ac proinde recta DB bifariam non dividit angulum FBC. Ducta propterea recta BE, quæ angulum ipſum FBC bifariam dividat, illa neceſſario cadet ſupra rectam BD, utpote conſtituens angulum EBC majorem angulo DBC. Hiſce poſitis, cum angulus FBC ſit duplus anguli BCA, utpote æqualis duobus BCA, BAC (e), qui ſunt æquales (f), nequit angulus EBC eſſe una pars dimidia anguli FBC, quin ſit æqualis angulo BCA (g). Duo autem hujuſmodi anguli EBC, BCA ſunt alterni, producti a recta BC incidente in rectas BE, AC. Ergo rectæ BE, AC ſunt parallelæ (h). Quamobrem directe producto latere AD in E, junctiſque punctis E, C recta EC, triangulum ABC erit æquale triangulo AEC (i). Triangulum autem AEC eſt majus triangulo ADC (k). Ergo triangulum quoque ABC eſt majus triangulo ADC (l). Triangulorum itaque &c. quod erat oſtendendum. Fig. 3. T. XIX.

(a) Lib. V. §. 69.
(b) Syn. Alg. §. 264.
(c) Ibidem §. 269.
(d) Lib. V. §. 96.
(e) Ibidem §. 50.
(f) Ibidem §. 60.
(g) Lib. I §. 113.
(h) Lib. IV. §. 12.
(i) Lib. VI §. 32.
(k) Syn. Alg. §. 257.
(l) Ibidem. §. 264.

COROLLARIUM.

Area trianguli regularis excedit aream trianguli irregularis iſoperimetri ſuper eandem baſim conſtituti.

3. Omne enim triangulum regulare eſt iſoſceles (a).

THEOREMA II.

Area rectanguli ſuper dimidiatam baſim trianguli iſoſcelis conſtituti, eique iſoperimetri, eſt major area ipſius trianguli.

4. Super partem dimidiam DC baſis AC trianguli iſoſcelis ABC conſtitutum habeatur rectangulum DFEC ipſi triangulo *iſoperimetrum*. Dico, aream rectanguli DFEC eſſe majorem area trianguli ABC.

Demonſtratio.

Fig. 4. T. XIX. Super eandem partem DC concipiatur rectangulum BDCG ejuſdem altitudinis *B*D cum ipſo triangulo ABC. Itaque cum latera DC, BG ſint æqualia (b), duo BG, DC æqualia erunt baſi AC. Eadem ratione æqualia erunt eidem baſi AC duo latera DC, FE rectanguli DFEC; ac proinde reliqua duo ejuſdem rectanguli latera DF, CE erunt æqualia duobus lateribus AB, BC ipſius trianguli ABC (c); cumque tam duo AB, BC (d), quam duo DF, CE ſint æqualia inter ſe (e), latus CE æquabit latus BC. Latus autem BC eſt majus latere GC (f), utpote oppoſitum angulo recto BGC in triangulo BGC, ac proinde angulo majori, quàm ſit angulus GBC, cui opponitur latus GC, qui eſt acutus (g). Ergo

(a) Lib. V. §. 26.
(b) Lib. VI. §. 20.
(c) §. 1.
(d) Lib. V. §. 25.
(e) Lib. VI. §. 20.
(f) Lib. V. §. 53.
(g) Ibid. §. 44.

Digitized by Google

Ergo latus quoque CE erit majus latere GC (a). Duo autem rectangula DE, DG ejuſdem baſis ſunt inter ſe, ut altitudines CE, CG (b). Igitur rectangulum DE erit majus rectangulo DG. Manifeſtum porro eſt, triangulum ABC æquare rectangulum BDCG (c). Ergo rectangulum DE majus quoque erit triangulo ABC (d). Itaque area rectanguli &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA III.

Area quadrati excedit aream cujuslibet parallelogrammi illi iſoperimetri.

I.

5. Rectangulum EBGF ſit *iſoperimetrum* quadrato ABCD, nimirū duo latera BG, *GF* rectanguli ſimul ſumta ſint æqualia duobus lateribus *BC*, CD quadrati, quemadmodum & reliqua duo FE, EB reliquis duobus DA, AB. Dico, aream quadrati eſſe majorem area rectanguli EBGF. Fig. 6. T. XIX.

Demonſtratio.

Latus FG ponatur una pars dimidia lateris DC, ut proinde latus DC ſit *duplum* lateris FG. Super rectam autem *bd* Fig. 7. duplam lateris *B*C conſtitutum habeatur rectangulum *ad*, cujus altitudo *cd* ſit in ratione *ſubdupla* ad altitudinem, ſive ad latus DC, atque adeo æqualis altitudini FG rectanguli EBGF. Quoniam igitur ex hypotheſi habetur *bd*=BC+CD, & BG=BC+CD—FG, baſis *bd* rectanguli *ad* erit major baſi BG rectanguli EG. Horum autem rectangulorum altitudines FG, *cd* poſitæ ſunt æquales. Ergo rectangulum *ad* eſt majus rectangulo EG (e). Quadratum autem ABCD adæquat rectangulum *ad* (f); cum poſitum ſit *bd*. BC=DC.

(a) Syn. Alg. §. 264.
(b) Lib. IX. §. 100.
(c) Ibid. §. 97.
(d) Syn. Alg. §. 264.
(e) Lib. IX. §. 98.
(f) Ibid. §. 109.

cd. Igitur quadratum quoque ABCD eſt majus rectangulo EBGF (a).

II.

Fig. 5. T. XIX. 6. Super latus BC quadrati ABCD conſtitutus ſit rombus EBCF ipſi quadrato *iſoperimeter*. Dico, aream quadrati ABCD excedere aream ipſius rombi.

Demonſtratio.

Directe producta baſi BC in G, demiſſaque ex vertice F perpendiculari FG, cum in triangulo CFG angulus CGF ſit rectus (b), adeoque major angulo FCG, qui eſt acutus (c), latus FC erit majus latere, ſive altitudine FG (d). Eſt autem DC=C*F*. Ergo latus quoque DC, ſive altitudo quadrati ABCD excedit altitudinem FG parallelogrammi EBCF. Quadratum autem ABCD eſt ad rombum EBCF, ut altitudo DC ad altitudinem FG (e). Ergo quadratum ABCD eſt majus rombo EBCF.

III.

Fig. 6. T. XIX. 7. Eſto romboides *m*BG*n* *iſoperimetra* quadrato ABCD: Dico, aream quadrati ABCD excedere aream romboidis *mBGn*.

Demonſtratio.

Super eandem baſim *BG* conſtitutum ſit rectangulum *EBGF* romboidi *mBGn*, adeoque etiam quadrato *ABCD*, *iſoperimetrum*. Ex demonſtratione §. 6. manifeſtum eſt, aream rectanguli *EBGF* majorem eſſe area romboidis *mBGn*. Area autem quadrati *ABCD* excedit aream rectanguli *EBGF* (f). Ergo area ipſius quadrati major itidem erit area romboidis *mBGn*. Itaque area quadrati &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Syn. Alg. §. 264.
(b) Lib. III. §. 23.
(c) Lib. V. §. 44.
(d) Ibid. §. 53.
(e) Lib. IX. §. 100.
(f) §. 5.

Digitized by Google

COROLLARIUM.

8. Ex demonſtratione §. 6. ad evidentiam colligitur, *aream rectanguli excedere aream cujuslibet parallelogrammi obliquanguli ſuper eandem baſim conſtituti, atque ipſi rectangulo iſoperimetri.*

LEMMA I.

Si in triangulo rectangulo ab uno acutorum angulorum ad latus oppoſitum recta utcunque ducatur, major erit proportio hujus lateris ad ſegmentum, quod eſt prope angulum rectum, quam totius anguli ad angulum illi ſegmento correſpondentem.

9. In triangulo rectangulo *ABC* ab angulo acuto *ACB* ad oppoſitum latus *AB* ducatur utcunque recta *CD*. Dico, rectam, ſive latus *AB* habere majorem proportionem ad ſegmentum *DB*, quam angulus *ACB* ad angulum *DCB*. Fig. 11. T.XIX.

Demonſtratio.

Quoniam angulus *DBC*, utpote rectus, eſt major angulo *CDB*, & angulus *ADC*, utpote obtuſus (a), excedit angulum *CBD* (b), latus *CD* erit majus latere *CB*, & latus *CA* latere *CD* (c). Quamobrem, ſi intervallo *CD* ex centro C deſcribatur arcus EF, is ſecabit latus *CA* ſupra punctum A in E, & latus *CB* directe infra *B* productum in puncto F, eritque propterea ratio trianguli ACD ad ſectorem ECD *majoris inæqualitatis* (d); *minoris* vero *inæqualitatis* ratio trianguli *DCB* ad ſectorem *DCF* (e); ac proinde ratio trianguli ACD ad ſectorem ECD erit major ratione trianguli DCB ad

(a) Lib. V. §. 44.
(b) Ibid. §. 51.
(c) Ibid. §. 53.
(d) Lib. I §. 16.
(e) Ibidem.

Digitized by Google

ad ſectorem DCF (a). Igitur *alternando*, major quoque erit ratio trianguli *ACD* ad triangulum *DCB*, quam ſectoris *ECD* ad ſectorem DCF (b); & *componendo*, triangulum *ACB* habet majorem rationem ad triangulum *DCB*, quam ſector ECF ad ſectorem DCF (c). Ut autem ſector ECF ad ſectorem DCF, ita eſt angulus ECF ad angulum DCF (d). Ergo triangulum *ACB* habebit majorem rationem ad triangulum *DCB*, quam angulus ECF, ſive *ACB* ad angulum DCF, ſi- *DCB*. Conſtat autem, baſim *AB* eſſe ad baſim *DB*, ut eſt triangulum *ACB* ad triangulum *DCB* (e). Ergo ratio quoque baſis *AB* ad baſim *DB* erit major ratione anguli *ACB* ad angulum *DCB*. Si ergo in triangulo &c. quod erat oſtendendum.

S C H O L I O N.

10. Idipſum eodem modo demonſtrabitur, ſi angulus *ABC* trianguli *ACB* fuerit obtuſus, & univerſaliter, ſi angulus *CBA* major fuerit angulo *CAB*.

L E M M A II.

Iſoperimetrarum figurarum rectilinearum regularium illa majorem habet catetum, quæ pluribus lateribus comprehenditur.

Fig. 8. Fig. 9. T. XIXI. 11. Sint duæ figuræ regulares *iſoperimetræ CAB*, LG, quarum *CAB* pluribus, quam LG, lateribus contineatur. Ex earum autem centro D, H ad latus *AB*, EG ducantur rectæ perpendiculares, ſive cateti *Da*, *Hd*. Dico, catetum *Da* eſſe majorem cateto *Hd*.

Demonſtratio.

Ductis radiis *DA*, *DB* in figura *CAB*, & *HE*, *HG* in figura

(a) Ibid. §. 40.
(b) Ibidem §. 129.
(c) Ibid. §. 133.
(d) Lib. IX. §. 163.
(e) Ibid. §. 99.

Digitized by Google

gura LG, cum plura ſint latera figuræ *CAB*, quam figuræ LG, earumque perimetri ſint æquales (a), latus EG erit majus latere *AB*, & quoniam tam radii *DA*, *DB*, quam radii HE, HG ſunt æquales (b), duo triangula *ADB*, *EHG* erunt iſoſcelia (c); atque adeo latera *AB*, *EG* bifariam diviſa erunt a catetis *Da*, *Hd* (d), eritque ſemilatus *Ed* majus ſemilatere *Aa* (e). Secetur ergo ſemilatus *Ed* in *e*, ita nimirut ſit *ed*=*Aa*. Quoniam igitur angulus EHG eſt ad quatuor rectos, ut latus EG ad totum perimetrum EGKL, ſive *CAB*, & perimeter *CAB* ad latus *AC*, ut ſunt quatuor anguli recti ad angulum *ADB* (f), erit ex *æqualitate rationis* angulus EHG ad angulum *ADB*, ut latus EG ad latus *AB* (g), cumque angulus EH*d* ſit ad angulum *ADa*, ut angulus EHG ad angulum *ADB*, & latus E*d* ad latus *Aa*, ſive ad ſegmentum *ed* illi æquale, ut totum EG ad totum *AB* (h), quatenus nempe cateti D*a*,H*d* tam angulos *ADB*, EHG, quam latera *AB*, EG bifariam dividunt (i), erit quoque angulus EH*d* ad angulum AD*a*, ut latus E*d* ad latus *ed*. Major autem eſt proportio rectæ *Ed* ad rectam *ed*, quam anguli EH*d* ad angulum *eHd* (k). Ergo major itidem erit proportio anguli EH*d* ad angulum AD*a*, quam anguli EH*d* ad angulum *e*H*d*, atque adeo angulus *e*H*d* erit major angulo *ADa* (l). Duo porro anguli *edH*, *AaD* æquales ſunt inter ſe, utpote recti; treſque anguli trianguli *eHd* adæquant tres angulos trianguli *ADa* (m). Igitur reliquus angulus *Hed* erit minor reliquo *DAa* (n). Hinc, ſi ad punctum *e* ponatur angulus *bed* angulo *DAa* æqualis, recta *be* cadet neceſſario extra rectam *He* (o), ſimulque proinde concurret cum recta *dH* in directum producta ultra centrum *H* in puncto *b*; & quoniam duo anguli *DAa*, *DaA* trianguli *ADa* ſunt æquales duobus angulis *bed*, *bde* trianguli *ebd*, alter alteri, & latera *Aa*, *ed*, quæ ipſis æqualibus angulis adjacent, poſita ſunt æqualia, latus *Da* æquabit latus *bd* (p). Latus autem *bd* eſt

(a) §. 1.
(b) Lib. IX. §. 19.
(c) Lib. V. §. 25.
(d) Ibid. §. 78.
(e) Lib. I. §. 126.
(f) Lib. IX. §. 125.
(g) Lib. I. §. 179.
(h) Ibid. §. 126.
(i) Lib. V. §§. 78. 79.
(k) §. 9.
(l) Lib. II. §. 120.
(m) Lib. V. §. 45.
(n) Syn. Alg. §. 269.
(o) Lib. III. §. 9.
(p) Lib. V §. 93.

Digitized by Google

eſt majus cateto *Hd*,eſtque latus *Da* catetus figuræ *ABC*. Ergo catetus *Da* figuræ *ABC* eſt major cateto *Hd* figuræ LG. Itaque *iſoperimetrarum* figurarum &c. quod erat oſtendendum.

COROLLARIUM I.

Catetus circuli eſt major cateto cujuslibet polygoni regularis ipſi circulo iſoperimetri.

12. Circulus enim eſt polygonum regulare infinitorum laterum (a), ac proinde hujuſmodi, ut nullum ſit polygonum regulare a circulo diverſum, cujus perimeter in tot latera ſit diviſus, in quot diviſus eſt perimeter circuli.

COROLLARIUM III.

Polyedrorum regularium iſoperimetrorum illud habet majorem catetum, quod pluribus planis continetur.

13. Enimvero, quemadmodum in figuris planis regularibus rectilineis augeri nequit numerus laterum illarum perimetrum conſtituentium, quin latera ipſa magis a centro recedant, atque adeo quin earundem catetus major fiat, ita in figuris ſolidis regularibus, quæ planis terminantur, numerus terminantium planorum augeri haud poteſt, quin ſimiliter plana ipſa a figuræ centro magis continuo remota fiant, ejuſque propterea catetus major evadat.

COROLLARIUM III.

Catetus ſphæræ eſt major cateto cujuslibet polyedri regularis, quod ſit ipſi ſphæræ iſoperimetrum.

14. Cum enim ſphæra ſit polyedrum regulare infinitis planis

(a) Lib. XI. §. 149.

Digitized by Google

planis terminatum (a) nullum eſt polyedrum regulare a ſphæra diverſum, cujus ſuperficies plura, quam ſphæræ ſuperficies, plana contineat.

THEOREMA IV.

Iſoperimetrarum figurarum rectilinearum regularium illa majoris eſt area, quæ pluribus lateribus continetur.

15. Sint duæ figuræ regulares rectilineæ *iſoperimetra CAB*, LEG, quarum CAB pluribus, quam LEG, lateribus comprehendatur. Dico, aream figuræ CAB eſſe majorem area figuræ LEG.

Demonſtratio.

Area figuræ CAB adæquat rectangulum contentum ſub cateto D*a*, & ſub ſemiperimetro *a*M*m*, & area figuræ LEG rectangulum contentum ſub cateto H*d*, & ſub ſemiperimetro *d*GKF (b); ut proinde harum figurarum areæ ſint *directe* inter ſe, ſicuti hujuſmodi rectangula. Rectangulum autem ex cateto D*a*, & ex ſemiperimetro *a*M*m* eſt majus rectangulo ex cateto H*d*, & ex ſemiperimetro *d*GKF (c); cum ſemiperimetri, qui ſpectari poſſunt, veluti ipſorum rectangulorum baſes, ſint æquales inter ſe; catetus vero D*a* ſit major cateto H*d* (d) ac proinde inæquales ſint illorum rectangulorum altitudines. Ergo area quoque figuræ *CAB* eſt major area figuræ LEG (e). Iſoperimetrarum itaque figurarum &c. quod erat oſtendendum. Fig. 8. Fig. 9. T. XIX.

(a) Lib. XIII. §. 117.
(b) Lib. X. §. 29.
(c) Lib. IX. §. 100.
(d) §. 11.
(e) Lib I. §. 45.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Areæ figurarum rectilinearum regularium diverſi generis ſibi mutuo iſoperimetrarum ſunt directe inter ſe, ut ipſarum cateti.

16. Demonſtravimus enim, aream figuræ *CAB* eſſe ad aream figuræ LEG illi iſoperimetræ, ut eſt rectangulum contentum ſub cateto *Da*, & ſub ſemiperimetro *a*M*m* ad rectangulum contentum ſub cateto *Hd*, & ſub ſemiperimetro *d*GKF. Hujuſmodi autem rectangula, utpote æquales baſes habentia, ſunt, ut cateti, nempe ut altitudines (a). Ergo areæ quoque ipſarum figurarum *CAB*, *LEG* erunt, ut cateti D*a*, H*d*.

COROLLARIUM II.

Area circuli excedit aream cujuslibet polygoni regularis illi iſoperimetri.

17. Area nimirum circuli *AC*B excedit aream polygoni regularis *RAB* ipſi circulo *iſoperimetri*. Etenim, cum circu-
Fig. 11. Fig. 8. T. XIX. lus ſit polygonum regulare infinitorum laterum (b), nullum eſt polygonum regulare a circulo diverſum, quod tot lateribus contineatur, quot circulus comprehenditur. Ergo illius area eſt major area polygoni cujuſcunque regularis illi iſoperimetri (c). Accedit, catetum D*C* circuli *ACB* excedere catetum D*a* polygoni *RAB* (d). Ergo illius quoque area erit major area polygoni *RAB* (e).

COROLLARIUM III.

18. Hinc *circulus eſt maxima omnium figurarum rectilinearum*

(a) Lib. IX. §. 100.
(b) Ibidem §. 149.
(c) §. 15.
(d) §. 12.
(e) §. 16.

rum regularium, quæ ſunt ipſi circulo iſoperimetra.

L E M M A III.

Media arithmetice proportionalis inter duas rectas lineas eſt major recta, quæ ſit media geometrice proportionalis inter eaſdem.

19. Recta *d* ſit media arithmetice proportionalis inter rectas *a*, *b* & recta *e* ſit media geometrice proportionalis inter eaſdem *a*, *b*. Dico, rectam *d* eſſe majorem recta *e*.

Demonſtratio.

Ex duabus *a*, *b* fiat una recta *GP*, ita nimirum ut ſit GN$=a$, & NP$=b$, adeoque $GP=a+b$. Deſcripto autem ſemicirculo *GTP*, ex centro Z erecta intelligatur perpendicularis ZT, & ex puncto N, in quo rectæ *GN*, NP ſimul uniuntur, recta perpendicularis NR. Itaque cum ſit Fig. 12. Fig. 10. T. XIX.

$GP=a+b$, erit $\frac{GP}{2}=\frac{a+b}{2}$ (a). Conſtat autem, eſſe ZT $=\frac{GP}{2}$ (b), & recta $d=\frac{a+b}{2}$ (c). Ergo erit ZT$=d$. Rurſus, cum itidem habeatur ex hypotheſi $GN=a$, & $NP=b$, erit $GN\times NP=ab$; atque adeo $\sqrt{GN\times NP}=\sqrt{ab}$ (d). Eſt autem recta $NR=\sqrt{GN\times NP}$ (e), & ex hypotheſi recta $e=\sqrt{ab}$. Ergo erit $e=$NR. Manifeſtum porro eſt, rectam ZT excedere rectam NR (f). Ergo recta quoque *d* erit major recta *e*; ac proinde media arithmetice &c. Quod erat oſtendendum.

(a) Lib. I. §. 81.
(b) Lib VII §. 10.
(c) Lib I. §. 196.
(d) Ibidem §. 187
(e) Lib. IX. §. 113.
(f) Lib. VII. §. 63.

THEOREMA V.

Area circuli excedit aream ellipſis ipſi circulo iſoperimetræ.

20. Eſto ellipſis EFHM iſoperimetra circulo *ACB*. Dico, aream circuli *ACB* excedere aream ipſius illipſis.

Demonſtratio.

Diameter PR circuli PQR ſit media geometrice proportionalis inter axes EH, FM ellipſis EFHM. Quoniam igitur ex hypotheſi peripheria circuli *ACB* adæquat perimetrum ellipſis EFHM, diameter *a*C ipſius circuli erit media arithmetice proportionalis inter axes EH, FM ellipſis (a); ac proinde diameter *a*C erit major diametro PR circuli PQR (b); adeoque etiam circulus *ACB* excedet circulum PQR (c). Ellipſis autem EFHM adæquat circulum PQR (d). Ergo circulus *ACB* major quoque erit area ellipſis EFHM (e). Area itaque circuli &c. quod erat oſtendendum.

Fig. 13. Fig. 14. Fig. 15. T. XIX.

COROLLARIUM.

Area polygoni regularis excedit aream polygoni iſoperimetri ejuſdem generis, cujus æqualia ſint latera, ſed inæquales anguli.

21. Ut ſi æqualia fuerint latera hexagoni *emnx*, ſed inæquales ipſius anguli, area hexagoni regularis *abd* ipſi *emnx* iſoperimetri erit major area hexagoni *emnx*. Hexagonum quippe regulare *abd* ſpectari poteſt veluti ſpecies circuli, & hexagonum *emnx* veluti ſpecies ellipſis, quemadmodum circulus jam conſideratur veluti ſpecies polygoni regularis, atque

Fig. 13. Fig. 14. T. XIX.

(a) Lib. XVI. §. 32.
(b) §. 19.
(c) Lib. IX. §. 50.
(d) Lib. XVI. §. 57.
(e) Syn. Alg. §. 260.

que hinc etiam ellipſis veluti ſpecies polygoni, cujus æqualia ſint latera, ſed inæquales anguli.

THEOREMA VI.

Polyedrorum regularium iſoperimetrorum illud eſt majus, quod pluribus planis continetur.

22. Sint duo polyedra regularia iſoperimetra ABC, DEF, quorum ABC pluribus numero planis, quam DEF, contineatur. Dico, aream polyedri ABC majorem eſſe area polyedri DEF. Fig. 17. Fig. 18.

Demonſtratio.

Recta *ae* ſit catetus polyedri AC*B*, & recta *bx* ſit catetus polyedri DEF. Concipiatur autem parallelepipedum *amn*, cujus baſis *emn* adæquet tertiam partem ſuperficiei polyedri ABC, & altitudo *ae* ipſius catetum; nec non parallelepipedum *bxy*, cujus itidem baſis *xyz* ſit tertia pars ſuperficiei polyedri DEF, & altitudo *bx* ſit ejuſdem catetus. Quoniam igitur ſuperficies ipſorum polyedrorum ſunt æquales (a), baſes quoque *emn*, *xyz* parallelepipedorum *amn*, *byz* erunt æquales (b); atque adeo parallelepipedum *amn* erit ad parallelepipedum *byz*, ut altitudo *ae* ad altitudinem *bx* (c), ſive ex conſtructione, ut catetus polyedri AC*B* ad catetum polyedri DEF. Catetus autem *ae* polyedri *ABC* eſt major cateto *bx* polyedri DEF (d). Ergo parallelepipedum quoque *amn* erit majus parallelepipedo *byz* (e). Manifeſtum porro eſt, polyedrum *ACB* eſſe æquale parallelepipedo *amn*, & polyedrum DEF parallelepipedo *byz* (f). Ergo polyedrum *ACB* majus itidem erit polyedro DEF (g). Polyedrorum ergo regularium &c. quod erat oſtendendum. Fig. 18. Fig. 20. T. XIX.

CO-

(a) §. 1.
(b) Lib. I. §. 126.
(c) Lib. XIII §. 47.
(d) §. 13.
(e) Lib. I. §. 45.
(f) Lib. XIV. §. 100.
(g) Syn. Alg §. 260.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Areæ polyedrorum regularium ſibi mutuo iſoperimetrorum ſunt directe inter ſe, ut ipſorum cateti.

23. Oſtenſum ſiquidem eſt, parallelepipeda *amn*, *byz*, quibus polyedra *ACB*, DEF ſunt æqualia, eſſe *directe* inter ſe, ut ipſorum altitudines *ae*, *bx*, quæ ab ipſorum polyedrorum catetis non ſunt diverſæ.

COROLLARIUM II.

24. *Ex quinque corporibus regularibus cubus eſt major tetraedro illi iſoperimetro, octaedrum cubo, dodecaedrum octaedro, & icoſaedrum dodecaedro*; ac proinde *icoſaedrum eſt quinque corporum regularium ſibi mutuo iſoperimetrorum maximum, tetraedrum vero omnium minimum.*

COROLLARIUM III.

Area ſphæræ excedit aream cujuslibet polyedri regularis illi iſoperimetri.

25. Ut ſi ſphæræ AC*B* iſoperimetrum fuerit polyedrum
Fig. 16. Fig. 17. T. XIX. regulare A*e*C, ſphæra erit major polyedro A*e*C. Etenim numero plura ſunt plana, quibus terminatur ſphæra ACB, quam illa, quibus polyedrum A*e*C comprehenditur; cum illa ſint numero infinita (a), hæc vero finita. Adde, catetum DC ſphæræ eſſe majorem cateto *ae* polyedri A*e*C (b). Ergo ſphæra ACB major itidem erit polyedro A*e*C (c).

CO-

(a) Lib. XIII §. 117. (b) §. 14. (c) §. 23.

Digitized by Google

COROLLARIUM IV.

26. Perſpicuum idcirco remanet, *ſphæram eſſe omnium ſolidorum regularium ipſi ſphæræ iſoperimetrorum maximum.*

THEOREMA VII.

Sphæra eſt major tam cylindro, quam cono ipſi ſphæræ iſoperimetro.

I.

27. Spectetur ſphæra ACB. Dico primo, ipſam eſſe majorem quocunque cylindro illi *iſoperimetro.*

Demonſtratio.

Sphæra ACB adæquat cylindrum, cujus baſeos circulus Fig. 16.
ſit æqualis toti ſuperficiei ipſius ſphæræ, altitudo vero T. XIX.
tertiæ parti radii DC (a), ac proinde eſt æqualis cylindro, cujus tota ſuperficies eſt major ſuperficie ipſius ſphæræ. Ergo ſphæra eſt major cylindro, cujus ſuperficies ipſius ſphæræ ſuperficiem adæquat.

II.

28. Dico 2, ſphæram ACB eſſe majorem cono, qui ſit ipſi ſphæræ *iſoperimeter.*

Demonſtratio.

Coincidit cum præcedenti. Sphæra enim eſt æqualis cono, cujus baſeos circulus ſit æqualis toti ſuperficiei ipſius ſphæræ, altitudo vero ejuſdem radio (b). Itaque ſphæra &c. quod erat oſtendendum. PO-

(a) Lib. XIV. §. 107. (b) Ibid §. 103.

Digitized by Google

P O R I S M A.

Inter duas datas magnitudines duas medias continuò geometrice proportionales invenire.

29. Inter duas magnitudines a, b invenire oporteat duas medias continuo geometrice proportionales.

Reſolutio.

Quadratum aa primæ multiplicetur per ſecundam b, & ex producto aab extrahatur radix cubica. Erit $\sqrt[3]{aab}$ duarum mediarum prima. Ducatur pariter quadratum bb ſecundę in primam a, & ex producto bba radix itidem cubica extrahatur, quæ erit duarum mediarum quæſitarum altera, habebitur nempe $\div\!\!\div\; a.\ \sqrt[3]{aab}.\ \sqrt[3]{bba}.\ b.$

Demonſtratio I.

Prima duarum mediarum quæſitarum ponatur $= x$, ſecunda $= y$. Igitur erit $\div\!\!\div\; a.\ x.\ y.\ b$; ac proinde $a^2.\ x^2 = a.\ y$ (a), ſeu propter continuam proportionem, $a^2.\ x^2 = x.\ b$, atque adeo $aab = x^3$ (b). Ergo erit $\sqrt[3]{aab} = \sqrt[3]{x^3}$ (c) ſeu $x = \sqrt[3]{aab}$. Similiter, cum ſit $\div\!\!\div\; b.\ y.\ x.\ a$, erit $b^2.\ y^2 = y.\ a$, ac propterea $bba = y^3$. Ergo $y = \sqrt[3]{bba}$.

De-

(a) Lib. I. §. 184. (b) Ibid. §. 82. (c) Ibidem §. 187.

Digitized by Google

Demonſtratio II.

Quoniam eſt $aabb = abab$, erit $\div\!\div aa.\ ab.\ bb$ (a). Quamobrem multiplicatis terminis primo per a, dein per b, habebitur

$$\div\!\div a^3.\ aab.\ bba,$$
$$\div\!\div baa.\ abb.\ b^3\ \text{(b)},$$

& ideo $\div\!\div a^3.\ aab.\ bba.\ b^3$. Ergo erit quoque $\div\!\div \sqrt[3]{a^3}.\ \sqrt[3]{aab}.\ \sqrt[3]{bba}.\ \sqrt[3]{b^3}$ (c), nempe $\div\!\div a.\ \sqrt[3]{aab}.\ \sqrt[3]{bba}.$; ac proinde &c.

COROLLARIUM

30. *Prima itaque duarum mediarum continuo geometrice proportionalium inter duas datas magnitudines eſt radix cubica producti, quod fit multiplicando quadratum primæ per ſecundam. Secunda vero eſt radix cubica producti, quod emergit multiplicando quadratum ſecundæ per primam.*

LEMMA IV.

Summa ex maxima, & minima quatuor magnitudinum geometrice proportionalium excedit ſummam reliquarum.

31. Eſto $a.\ b = c.\ d$, quarum a ſit omnium maxima; d omnium minima. Dico, eſſe $a + d > b + c$.

Demonſtratio.

Cum enim ſit $a.\ b = c.\ d$, erit $a - c.\ b - d = a.\ b$ (d), atque adeo $a - c > b - d$ (e) propter hypotheſim. Igitur habebitur quoque $a - c + d > b - d + d$ (f), ſive $a - c + d > b$, Euclid. l. 5. p. 25

&

(a) Lib. I. §. 55.
(b) Ibid. §. 157.
(c) Ibid. §. 189.
(d) Lib. I. §. 152.
(e) Ibid. §. 45.
(f) Syn. Alg. §. 108.

Digitized by Google

& $a - c + d + c > b + c$ (a), ſeu $a + d > b + c$. Summa ergo ex maxima &c. quod erat oſtendendum.

L E M M A V.

Si inter primam, & quartam quatuor magnitudinum continuo geometrice proportionalium, quarum prima ſit omnium maxima, ponatur media arithmetice proportionalis, hæc erit major illarum tertia.

32. Eſto $\div\!\!\div\, a.\ b.\ c.\ d$, atque adeo $\frac{a+d}{2}$ media arithmetice proportionalis inter primam a, & quartam d, ſitque prima a omnium maxima. Dico, eſſe $\frac{a+d}{2} > c$.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi habetur $b > c$, erit $b + c > c + c$ (b), & ideo $\frac{b+c}{2} > \frac{c+c}{2}$, ſive $\frac{b+c}{2} > c$ (c). Eſt autem $a + d > b + c$ (d); ac proinde $\frac{a+d}{2} > \frac{b+c}{2}$ (e), Ergo erit quoque $\frac{a+d}{2} > c$. Itaque ſi inter primam, &c. quod erat oſtendendum.

LEM-

(a) Syn. Alg. §. 268.
(b) Synop. Algeb. §. 268.
(c) Lib. I. §. 95.
(d) §. 31.
(e) Lib. I. §. 95.

Digitized by Google

L E M M A VI.

Sint quatuor magnitudines continuo geometrice proportionales $a, \sqrt[3]{aab}, \sqrt[3]{bba}, b$, *quarum prima* a *ſit omnium maxima. Inter primam autem* a, *&* *quartam* b *ponatur media arithmetice proportionalis* $\frac{a+b}{2}$, *tum inter primam* a, *& ipſam* $\frac{a+b}{2}$ *ſit media geometrice proportionalis* $\frac{\sqrt{aa+ab}}{2}$, *& inter eandem* $\frac{a+b}{2}$, *& quartam* b *ſit media geometrice proportionalis* $\frac{\sqrt{bb+ab}}{2}$

nimirum eſto ∺ $a \,.\, \sqrt[3]{aab} \,.\, \sqrt[3]{bba} \,.\, b$, ÷ $a \,.\, \frac{a+b}{2} \,.\, b$,

∺ $a \,.\, \frac{\sqrt{aa+ab}}{2} \,.\, \frac{a+b}{2}$, ∺ $\frac{a+b}{2} \,.\, \frac{\sqrt{bb+ab}}{2} \,.\, b$.

I.

33. Dico primo, mediam geometrice proportionalem $\frac{\sqrt{aa+ab}}{2}$ eſſe majorem prima $\sqrt[3]{aab}$ duarum mediarum continuo geometrice proportionalium $\sqrt[3]{aab}$, $\sqrt[3]{bba}$.

Demonſtratio.

Ponatur $\frac{\sqrt{aa+ab}}{2}=m$, $\frac{a+b}{2}=n$, $\sqrt[3]{aab}=p$, $\sqrt[3]{bba}=q$. Cum igitur ſit $n>q$ (a), erit $an>aq$ (b). Eſt autem $mm=an$, & $pp=aq$ (c), quatenus ex hypotheſi habetur ∺ $a.\ m.\ n$, ∺ $a.\ p.\ q$. Ergo erit quoque $mm>pp$, ac proinde $m>p$, ſive, ſubſtitutis valoribus, erit $\frac{\sqrt{aa+ab}}{2}>\sqrt[3]{aab}$.

II.

34. Dico 2°, mediam quoque geometrice proportionalem $\frac{\sqrt{bb+ab}}{2}$ eſſe majorem ſecunda $\sqrt[3]{bba}$ duarum mediarum continuo proportionalium $\sqrt[3]{aab}$, $\sqrt[3]{bba}$.

Demonſtratio.

Quandoquidem, cum ſit $\sqrt{\frac{a}{2}}.\sqrt[3]{a}=\sqrt{\frac{b}{2}}.\sqrt[3]{b}$ (d) erit pariter $\sqrt{a+b}\times\sqrt{\frac{a}{2}}.\sqrt[3]{ab}\times\sqrt[3]{a}=\sqrt{a+b}\times\sqrt{\frac{b}{2}}.\sqrt[3]{ab}\times\sqrt[3]{b}$ (e), ſeu $\frac{\sqrt{aa+ab}}{2}.\sqrt[3]{aab}=\frac{\sqrt{bb+ab}}{2}.\sqrt[3]{bba}$. Oſtenſum eſt autem, eſſe

$\sqrt{aa}$

(a) §. 32.
(b) Lib. I. §. 95.
(c) Ibidem §. 83.
(d) Lib. I. §. 37.
(e) Ibid. §. 159.

Digitized by Google

$\frac{\sqrt{\overline{aa+ab}}}{2} > \sqrt[3]{aab}$ (a). Ergo erit quoque $\frac{\sqrt{\overline{bb+ab}}}{2} > \sqrt[3]{bba}$ (b); ac proinde &c. quod erat oſtendendum.

THEOREMA VIII.

Sphæra eſt major ſphæroide ipſi iſoperimetra.

I.

35. Eſto ſphæra EMF, cui *iſoperimetra* ſit ſphærois lata CADB, genita ex revolutione ellipſis CADB circa minorem axim CD. Dico, ſphæram EMF eſſe majorem ſphæroide CADB. Fig. 22. Fig. 2.

Demonſtratio.

Inter rectas *ab*, *cd*, quarum *ab* ſit æqualis majori axi AB, & *cd* axi minori CD ellipſis generatricis CADB, ſint duæ mediæ continuo geometrice proportionales *mn*, *ze*. Inter eaſdem vero rectas *ab*, *cd* ſit media arithmetice proportionalis *xy*, & inter primam *ab*, ipſamque *xy* media geometrice proportionalis *ef*. Prima autem *mn* duarum mediarum continuo geometrice proportionalium *mn*, *ze* ſit diameter ſphæræ *man*. Itaque, cum ex hypotheſi ſuperficies ſphæræ EMF adæquet ſuperficiem ſphæroidis CADB, diameter EF ipſius ſphæræ erit æqualis mediæ *ef* geometrice proportionali inter rectas *ab*, *xy* (c), cumque ſphærois CADB adæquet ſphæram *man* (d), ſphæra EMF erit ad ſphæroidem CADB, ut eſt ad ſphæram *man* (e). Sphæra autem EMF eſt major ſphæra *man*; cum diameter EF ſit major diametro *mn*, quemadmodum recta *ef*, cui diameter EF eſt æqualis, excedit re- Fig. 25. Fig. 24. Fig. 23. T. XIX.

ctam

(a) §. 33.
(b) Lib. I. §. 45.
(c) Lib. XVI. §. 133.
(d) Ibid. §. 127.
(e) Lib. I. §. 112.

Digitized by Google

ctam *mn* æqualem diametro ſphæræ *man* (a). Ergo ſphæra EMF major itidem erit ſphæroide lata CADB (b).

II.

Fig. 26. Fig. 27. 36. Ex revolutione ejuſdem ellipſis circa majorem axim AB genita ſit ſphærois oblonga ACBD, cui *iſoperimetra* ſit ſphæra NMR. Dico, ſphæram NMR majorem eſſe ſphæroide ACBD.

Demonſtratio.

Poſitis iiſdem rectis proportionalibus, ut ſupra, inter axes ellipſis generatricis, concipiatur media geometrice proportionalis *nr* inter mediam arithmetice proportionalem *xy*, & rectam *cd* minori axi æqualem, ſitque recta *ze* (ſecunda nempe duarum mediarum continuo geometrice proportionalium inter axes *ab*, *cd*) diameter ſphæræ *zxe*. Sphærois itaque ACBD æquabit ſphæram *zxe* (c); atque adeo ſphæra NMR erit ad ſphæroidem ACBD, ut ſe habet ad ſphæram *zxe* (d). Sphæra autem NMR eſt major ſphæra *zxe*; cum ejus diameter NR, utpote æqualis rectæ *nr* (e), ſit major diametro *ze* ſphæræ *zxe* (f). Ergo ſphæra NMR major quoque erit ſphæroide ACBD (g). Itaque ſphæra &c. quod erat oſtendendum.

Fig. 24. Fig. 25. Fig. 28. T. XIX.

ELE-

(a) §. 33
(b) Lib. I. §. 45.
(c) Lib. XVI. §. 128.
(d) Lib. I. §. 112.
(e) Lib. XVI. §. 133.
(f) §. 34.
(g) Lib. I. §. 45.

Digitized by Google

ELEMENTORUM MATHEMATICORUM

LIBER XVIII.

Præcipua elementaris Geometriæ problemata reſolvuntur, & demonſtrantur.

ELementaris Geometriæ problemata, quæ in hoc poſtremo libro reſolvuntur, & ex traditis principiis demonſtrantur, ſunt præcipua, quæ in hac Geometriæ parte tradi ſolent. Totum porro librum in tres ſectiones, majoris claritatis gratia, partiti ſumus, quarum prima ea continet problemata, quæ ad *lineam* ſpectant; ſecunda complectitur illa, quæ ad *figuras planas*; tertia vero, quæ ad *ſolidas* pertinent, comprehendit.

SECTIO I.

De linea recta, & angulo plano rectilineo.

PROBLEMA I.

Rectam lineam finitam biſariam dividere.

1 ESto recta AB, quam biſariam dividere oporteat. Fig. 1. T.XX.

Reſolutio.

Ex punctis extremis A, B, lubito *circini* intervallo, quod

quod dimidiam ipſius rectæ partem excedat *, deſcribantur arcus *ab*, *cd*, *ef*, *mn* ſe mutuo ſecantes in punctis *x*, *z*, per quæ ducatur recta *xz*. Hæc biſariam dividet ipſam rectam AB in puncto C.

Demonſtratio.

Quoniam rectæ A*x*, B*x* ex conſtructione ſunt æquales (a), triangulum A*x*B erit iſoſceles (b). Rurſus cum duo latera A*x*, B*x* ſint æqualia, & latus *xz* ſit commune utrique triangulo A*xz*, B*xz*, eorumque baſes A*z*, B*z* ſint æquales (c), angulus A*xz* æquabit angulum B*xz* (d). Ergo recta *x*C biſariam dividet angulum verticalem A*x*B trianguli iſoſcelis *A**x*B. Quamobrem recta *x*C biſariam quoque dividit rectam AB (e), adeoque &c.

COROLLARIUM.

2. Cum ob æqualitatem rectarum *xA*, *Az*, *zB*, *Bx* quadrilaterum *xAzB* ſit parallelogrammum (f), &, qua ratione recta *xz* biſariam dividit rectam *AB*, eadem ratione recta *xz* a recta *AB* biſariam dividatur, ſintque rectæ *AB*, *xz* diagonales parallelogrammi *xAzB*, perſpicuum remanet, *diagonales parallelogrammi ſeſe mutuo biſariam dividere.*

SCHOLION.

3. Si lineæ dividendæ longitudo major fuerit, quam ſuperior operatio patiatur, auferantur hinc inde, initio ſumpto ab extremis, partes numero, & magnitudine æquales, donec idoneum ſegmentum in medio relictum fuerit. Ut ſi dividenda ſit recta DE, detractis hinc inde æqualibus partibus D*A*, BE, reſiduum ſegmentum AB biſariam, ut ſupra, ſecetur. Tota enim recta DE erit hoc ipſo biſariam diviſa.

Fig. 1. T. XX.

PRO-

(a) Lib. VII. §. 10.
(b) Lib. V. §. 25.
(c) Lib. VII. §. 10.
(d) Lib. V. §. 82.
(e) Ibidem § 76.
(f) Lib. VI. §. 28.

Digitized by Google

PROBLEMA II.

Arcum circuli biſariam dividere.

4. Dividere oporteat biſariam arcum circuli $A\gamma B$.

Reſolutio.

Extrema puncta arcus jungantur recta AB, quæ biſariam dividatur ope rectæ xz (a). Hæc biſariam quoque dividet arcum ipſum $A\gamma B$. Fig. 1. T. XX.

Demonſtratio.

Cum enim, ut §. 1. oſtenſum eſt, anguli Axz, Bxz ſint æquales, & triangulum AxB ex conſtructione ſit iſoſceles, recta xC erit chordæ AB perpendicularis (a). Ergo recta ipſa xC, ſive xz, arcum $A\gamma B$ biſariam dividit (b).

PROBLEMA III.

Angulum rectilineum biſariam dividere.

5. Eſto angulus rectilineus AxB biſariam dividendus.

Reſolutio.

Ex apice x, lubito circini intervallo, ſecentur rectæ xA, xB in punctis A, B, & ducatur recta AB, quæ biſariam dividatur, ut ſupra, ope rectæ xz. Hæc biſariam dividet ipſum angulum AxB. Fig. 1. T. XX.

(a) §. 1.
(b) Lib. VII. §. 40.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Patet ex demonſtratione §. 1.

PROBLEMA IV.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

6. Ad datam rectam lineam AB, datumque in ea punctum *a* conſtruere oporteat angulum rectilineum, qui ſit æqualis dato angulo DCE.

Reſolutio.

Fig. 2. Fig. 3. T. XX. Ex dati anguli apice C, lubito circini intervallo, deſcribatur arcus DE inter rectas CD, CE comprehenſus. Tum eodem intervallo, ex dato puncto *a* fiat arcus *bd*, in quo ex puncto *b* ſumatur portio *be* arcui DE æqualis, & ducatur recta *af*. Angulus *faB* erit angulus quæſitus.

Demonſtratio.

Cum enim arcus *be*, DE ſint æquales, anguli quoque *bae*, DCE erunt æquales (a).

PROBLEMA V.

Per datum punctum extra datam rectam ducere rectam illi parallelam.

7. Extra rectam AB habeatur punctum C, per quod rectam ipſi AB parallelam ducere oporteat.

Re-

(a) Lib. III. §. 14.

Reſolutio.

A dato puncto C ad datam AB ducatur recta C*a* angulum acutum conſtituens C*a*A. Tum centro *a*, intervallo *a*C deſcribatur arcus C*e*, & ex puncto C, eodem *circini* intervallo, arcus *ad*, in quo ſumto arcu *ab* arcui C*e* æquali, per puncta C, *b* agatur recta C*b*, quæ erit parallela quæſita. Fig. 4. T. XX.

Demonſtratio.

Quoniam arcus C*e*, *ba* ſunt æquales, æquales erunt anguli alterni C*ae*, *b*C*a* (a). Ergo rectæ C*b*, AB erunt parallelæ (b).

PROBLEMA VI.

Secare rectam lineam, ut altera recta ſecta eſt.

8. Secare oporteat rectam AC, ut eſt ſecta recta AE in puncto D.

Reſolutio.

Jungantur rectæ AC, AE, ut angulum conſtituant CAE. Tum ab extremo C ad extremum E ducta recta CE, Fig. 5. per punctum D agatur recta BD rectæ CE parallela (c). T. XX. Recta BD ſecabit rectam AC in puncto B, ut ſecta eſt recta AE in D.

Demonſtratio.

Cum enim ex conſtructione recta BD ſit parallela baſi CE trianguli CAE, habebitur AB. BC = AD. DE (d).

(a) Lib. III. §. 14.
(b) Lib. IV. §. 112.
(c) §. 7.
(d) Lib. IX. §. 55.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

Fig. 5. T.XX. 9. Hinc patet artificium dividendi rectam lineam ſecundum datam proportionem, puta rectam AE ſecundum rationem rectæ *ab* ad rectam *bc*. Etenim, ducta recta indefinita AC angulum conſtituente CAE cum recta AE, ponatur AB=*ab*, & BC=*bc*, junctiſque punctis C, E recta CE, per punctum B ducatur recta BD ipſi CE parallela (a). Erit AD. DE=*ab*. *bc*, cum ſit AD. DE=AB. BC (b).

COROLLARIUM II.

10. Manifeſtum eſt propterea, quomodo ex data recta AE imperata pars auferri poſſit, puta una pars tertia. Quandoquidem, ſi ducta recta indefinita AC, ſumantur in ea ex puncto A tres partes æquales ſubitæ magnitudinis *AB*, *Bm*, *mC*, junctique punctis extremis C, E recta CE, per punctum B ducatur recta BD rectæ CE parallela, erit AD una pars tertia rectæ AE. Hinc

COROLLARIUM III.

11. Liquido apparet, quomodo recta linea in quotcunque partes æquales ſecari poſſit. Illarum quippe una inventa, ſumtaque ope *circini* illius magnitudine, tota ipſa recta in quæſitas partes dividetur.

PROBLEMA VII.

Datæ rectæ lineæ e puncto in illa dato rectam perpendicularem excitare.

12. In recta AH datum ſit punctum C, ex quo rectam ipſi AH perpendicularem excitare oporteat.

Re-

(a) §. 7. (b) Lib. IX. §. 55.

Digitized by Google

Reſolutio.

Extra ipſam AH ſumatur quodvis punctum D, ex quo ſi ducatur recta ad datum punctum C, angulum acutum conſtituat. Tum ex ipſo puncto D, intervallo DC deſcribatur circulus *x*CB ſecans rectam AH in puncto B, ex quo ducatur diameter B*x*, & jungantur puncta *x*, C recta *x*C, quæ erit ipſi AH perpendicularis. Fig. 6. T. XX.

Demonſtratio.

Rectus enim eſt angulus *x*CH (a), utpote in ſemicirculo *x*CB conſiſtens.

COROLLARIUM.

13. Manifeſtum eſt, quomodo per datum punctum in data recta linea poſſit duci recta, quæ rectam ipſam ad angulos rectos dividat.

PROBLEMA VIII.

Ad datam rectam lineam ex puncto extra illam poſito rectam perpendicularem ducere.

14. Extra rectam AH datum habeatur punctum *x*, ex quo rectam ducere oporteat ipſi AH perpendicularem.

Reſolutio.

Ex dato puncto *x* ad ipſam AH ducatur recta *x*B acutum angulum efficiens *x*BA. Hac deinde bifariam diviſa in puncto D (b), centro D, intervallo DB, ſe- Fig. 6. T. XX.

(a) Lib. VII. §. 75.
(b) §. 1.

Digitized by Google

ſecetur recta AH in C, ad quod ex dato puncto x ducatur recta xC, quæ erit perpendicularis quæſita.

Demonſtratio.

Conſtat enim, deſcripto circulo xCB, angulum xCB in ſemicirculo conſiſtere, atque adeo ipſum eſſe rectum (a).

S C H O L I O N.

15. Cognito artificio ducendi rectam, quæ alteri rectæ ad perpendiculum incumbat, liquido apparet, quomodo *norma* conſtrui poſſit. Eſt enim *norma* inſtrumentum Geometricum ex duabus regulis ad angulum rectum ſimul junctis compoſitum, quo explorari ſolet, an datus angulus rectilineus ſit rectus.

D E F I N I T I O.

16. *Recta linea dicitur ſecta media, & extrema ratione, cum majus illius ſegmentum eſt ad ſegmentum minus, ut tota ipſa linea eſt ad ſegmentum majus.* Recta nimirum AB erit ſecta *media, & extrema ratione* in puncto D, ſi fuerit AD. DB = AB. AD. Fig. 7. T. XX.

C O R O L L A R I U M.

17. Itaque recta linea erit ſecta *media, & extrema ratione*, ſi majus illius ſegmentum fuerit media proportionalis inter totam ipſam lineam, & ſegmentum minus; ac proinde ſi quadratum ſegmenti majoris fuerit æquale rectangulo contento ſub tota, & ſub minori ſegmento (b).

PRO-

(a) Lib. VII. §. 75. (b) Lib. IX. §. 111.

Digitized by Google

PROBLEMA IX.

Rectam lineam finitam media, & extrema ratione dividere.

18. Eſto recta *AB media, & extrema ratione* dividenda.

Reſolutio.

Bifariam diviſa recta *AB* in *a* (a), toti *AB* adiiciatur pars *Ab*=*Aa*. Tum ex puncto *A* erecta perpendiculari *Ad*=*AB* (b), centro *b*, intervallo *bd*, deſcribatur arcus *dD* ſecans rectam *AB* in *D*. Recta *AB* erit ſecta in *D media, & extrema ratione*. Fig. 7. T. XX.

Demonſtratio.

In directum producta recta *Db* in *e*, fiat *eb*=*bA*, adeoque *eA*=*AB*, ſitque *ex* rectangulum ex tota *eA*, ſive *AB* ſimul cum adiecta *AD* in ipſam *AD*; & *em* ſit quadratum rectæ *eA*, ſeu *AB*, ſive *Ad*. Quoniam igitur recta *eA* diviſa eſt bifariam in *b*, eique adiecta eſt pars *AD*, rectangulum *ex*, una cum quadrato partis dimidiæ *bA* erit æquale quadrato rectæ *bD* (c); ac proinde etiam quadrato rectæ *bd*; cum ſcilicet ſit *bd*=*bD*. Quadratum autem rectæ *bd* eſt æquale quadratis laterum *bA*, *Ad* ſimul ſumtis (d). Ergo rectangulum quoque *ex* una cum quadrato partis *bA* erit æquale quadratis rectarum *bA*, *Ad* (e), nempe quadrato *em* rectæ *eA* una cum quadrato rectæ *bA* ex conſtructione. Sublato propterea communi quadrato rectæ *bA*, rectangulum *ex* erit æquale quadrato *em* (f), ſique his dematur commune rectangulum *en*, reliquum *fm* erit æquale reſiduo quadrato *Ax* (g). Eſt autem

(a) §. 1.
(b) §. 12.
(c) Lib. XV. §. 246.
(d) Lib. VI. §. 17.
(e) Syn. Alg. §. 261.
(f) Ibid. §. 266.
(g) Ibidem.

Digitized by Google

autem $fn = AB$, $eg = eA = AB$, $ef = AD$, adeoque $fg = DB$; ac proinde *fm* eſt rectangulum ex tota *AB* in partem *DB*, & *Ax* eſt quadratum partis *AD*. Ergo recta *AB* erit ſecta *media, & extrema ratione* in *D* (a).

PROBLEMA X.

Datis duabus rectis lineis tertiam geometrice proportionalem invenire.

19. Poſt rectas *ab*, *bc* invenire oporteat tertiam geometrice proportionalem.

Reſolutio.

Ducta recta indefinita AD, ſumatur AB = *ab*; erectaque perpendiculari BC = *bc* (b), jungantur puncta A, C recta AC, & ex puncto C agatur recta CD, quæ ad perpendiculum incumbat rectæ CA, rectæque BD occurrat in puncto D. Recta BD erit tertia proportionalis quæſita. Fig. 1. T.XX.

Demonſtratio.

Cum enim ex conſtructione angulus ACD ſit rectus, triangulum ACD erit rectangulum. Recta autem C*B* hypotenuſæ AD itidem ex conſtructione ad perpendiculum inſiſtit. Ergo erit ∺ AB. *BC*. *BD* (c).

COROLLARIUM.

20. Hinc apparet, quomodo linearum proportio in infinitum continuari poſſit.

PRO-

(a) §. 17.
(b) §. 12.
(c) Lib. IX. §. 74.

Digitized by Google

PROBLEMA XI.

Datis tribus rectis lineis quartam geometrice proportionalem invenire.

21. Datis tribus *ab*, *bc*, *ad*, invenire oporteat quartam, ad quam ſe habeat tertia *ad*, ut ſe habet prima *ab* ad ſecundam *bc*.

Reſolutio.

Ex puncto A ducantur rectæ indefinitæ AC, AE angulum conſtituentes CAE. Tum ex puncto A ſumatur in recta AC ſegmentum *AB* = *ab*, & ſegmentum *BC* = *bc*, in recta vero AE ſegmentum AD = *ad*, junctiſque punctis *B*, *D* recta *BD*, ex puncto *C* ducatur recta CE parallela rectæ *BD* (a). Segmentum DE erit quarta proportionalis quæſita. Fig. 5. T. XX.

Demonſtratio.

Nam, cum in triangulo CAE recta *BD* ſit parallela baſi *CE*, erit *AB*. *BC* = *AD*. *DE* (b).

PROBLEMA XII.

Inter duas rectas lineas mediam geometrice proportionalem invenire.

22. Inter duas rectas *AB*, *BD* mediam geometrice proportionalem invenire oporteat.

(a) §. 7. (b) Lib. IX. §. 55.

Digitized by Google

Reſolutio.

Duæ rectæ *AB*, *BD* jungantur in directum, ita nimirum
Fig. 8. T. XX. ut unam rectam conſtituant *AD*, & ex puncto *B* educatur recta perpendicularis *BC* (a). Tum biſariam diviſa tota AD in puncto E (b), centro E, intervallo partis dimidiæ EA, deſcribatur ſemicirculus ACD ſecans rectam *BC* in puncto C. Recta *BC* erit media proportionalis quæſita.

Demonſtratio.

Patet ex §. 76. lib. IX.

S E C T I O II.

De figuris planis.

DEFINITIO.

Fig. 9. T. XX. 23. *Figura rectilinea ſuper datam rectam lineam deſcribi dicitur, cum ipſa linea aſſumitur pro latere figuræ deſcribendæ.* Sic triangulum *ADB* dicitur deſcriptum ſuper rectam *AB*, quia unum ex lateribus ipſius trianguli eſt ipſa recta *AB*.

PROBLEMA I.

Ex tribus rectis lineis, quarum duæ ſimul ſumtæ reliqua ſint majores, triangulum conſtruere.

24. Ex tribus rectis lineis *AB*, *ab*, *cd*, quarum duæ quæcunque ſimul ſumtæ reliquam excedant, triangulum conſtruere oporteat.

Re-

(a) §. 12. (b) §. 1.

Digitized by Google

Reſolutio.

Ex puncto extremo A unius ex illis AB, intervallo alterius *cd*, deſcribatur arcus *mn*, arcus vero *yx* priorem ſecans ex altero extremo B, intervallo rectæ *ab*. Tum ex puncto ſectionis D ad extrema A, B ducantur rectæ AD, BD, quæ conſtituent triangulum quæſitum ADB. Fig. 9. T. XX.

Demonſtratio.

Eſt enim AD = *cd*, & BD = *ab* (a).

COROLLARIUM.

25. Hinc patet artificium conſtruendi ſuper datam rectam lineam triangulum tam æquilaterum, quam iſoſceles. Quandoquidem æquilaterum erit triangulum, ſi tres datæ rectæ lineæ fuerint æquales; erit vero iſoſceles, ſi duæ tantum æquales fuerint, illæ nimirum, quæ pro lateribus aſſumuntur.

PROBLEMA II.

Datis duabus rectis lineis, rectangulum conſtruere.

26. Rectangulum conſtruere oporteat, cujus duo latera circa angulum rectum ſint duæ datæ rectæ lineæ *ab*, *ad*.

Reſolutio.

Poſita recta AB = *ab*, ex illius extremis A, B erigantur perpendiculares indefinitæ AF, BG (b); tum fiat AD = *ad*, & BE = AD, junganturque extrema D, E recta DE. Quadrilaterum DB erit rectangulum quæſitum. Fig. 12. T. XX.

(a) Lib. VII. §. 10.

(b) §. 12.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Enimvero, cum rectæ *AD*, *BE* ad perpendiculum in eodem plano incumbant rectæ AB, erunt parallelæ (a). Sunt autem æquales ex conſtructione. Ergo duæ quoque AB, DE parallelæ erunt inter ſe (b), & æquales (c), ac proinde quadrilaterum DB erit parallelogrammum (d), & quidem rectangulum (e); adeoque &c.

COROLLARIUM.

27. Liquido apparet, quomodo ſuper datam rectam quadratum conſtrui poſſit. Satis namque eſt, ut altera illi æqualis aſſumatur, atque ex illis rectangulum fiat.

PROBLEMA III.

Super datam rectam lineam dato triangulo rectilineo triangulum rectilineum ſimile ſimiliterque poſitum deſcribere.

28. Super rectam AB dato triangulo rectilineo *abe* triangulum ſimile ſimiliterque poſitum deſcribere oporteat.

Reſolutio.

Fig. 10. Fig. 11. T. XX. Ad extremum A datæ rectæ AB conſtituatur angulus *EAB* æqualis angulo *eab*, & ad extremum *B* ejuſdem rectæ angulus EBA angulo *eba* æqualis (f); rectæ autem AE, BE *directe* producantur, donec concurrant in puncto E. Triangulum AEB erit ſimile triangulo *aeb*, & ſimiliter poſitum.

De-

(a) Lib. IV. §. 10.
(b) Lib. V §. 88.
(c) Ibidem. §. 75.
(d) Lib. VI. §. 8.
(e) Ibid. §. 9.
(f) §. 6.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Cum enim anguli EAB, EBA ſint æquales ex conſtructione angulis *eab*, *eba*, alter alteri, reliquus itidem AEB erit reliquo *aeb* æqualis (a). Duo igitur triangula AEB, *aeb* ſunt æquiangula; adeoque ſimilia (b); cumque æquales eorum anguli eodem ordine ſeſe conſequantur, erunt etiam ſimiliter poſita; adeoque &c.

PROBLEMA IV.

Super datam rectam lineam dato polygono polygonum ſimile ſimiliterque poſitum deſcribere.

29. Super rectam AB deſcribere oporteat pentagonum ſimile pentagono *ecbd*, & ſimiliter poſitum.

Reſolutio.

Pentagonum *ecb* reſolvatur in tria triangula *aeb*, *ace*, *bde*; tum ſuper rectam AB fiat triangulum AEB ſimile triangulo *aeb*, ſuper latus AE triangulum ACE ſimile triangulo *ace*, & ſuper latus EB triangulum BDE ſimile triangulo *bde* (c). Pentagonum CAD erit ſimile dato pentagono *ead*, & ſimiliter poſitum. Fig. 10. Fig. 11. T. XX.

Demonſtratio.

Utrumque pentagonum CAD, *cad* in totidem ex æquo triangula ſimilia reſolvi poteſt. Id autem nonniſi ſimilibus polygonis convenit. Ergo duo ipſa pentagona CAD, *cad* ſunt ſimilia.

PRO-

(a) Lib. V. §. 46. (b) Lib. IX §. 66. (c) §. 28.

PROBLEMA V.

Dati circuli centrum invenire.

30. Eſto circulus xCB, cujus centrum invenire oporteat.

Reſolutio I.

Ducta chorda CB, ex altero ipſius extremo C erigatur perpendicularis Cx occurrens peripheriæ ipſius circuli in puncto x (a); duoque extrema puncta x, B jungantur recta xB, quæ bifariam dividatur in D (b). Punctum D erit centrum ipſius circuli.

Fig. 6. T. XX.

Demonſtratio.

Cum enim angulus xCB ſit rectus ex conſtructione, ſegmentum xCB circuli erit ſemicirculus (c). Ergo recta xB erit diameter circuli xCB; ac proinde punctum D illius centrum.

Reſolutio II.

Ducta utcunque chorda CB, eaque bifariam diviſa in puncto b (d), erigatur perpendicularis ea (e), occurrens peripheriæ ipſius circuli in punctis a, e, ipſaque ae bifariam dividatur in puncto D (f), quod erit centrum circuli quæſitum.

Demonſtratio.

Patet manifeſte ex §. 42. lib. VII.

PRO-

(a) §. 12.
(b) §. 1.
(c) Lib VII. §. 72.
(d) §. 1.
(e) §. 12.
(f) §. 1.

Digitized by Google

PROBLEMA VI.

Per tria data puncta, quæ non ſint in directum poſita, circulum deſcribere.

31. Circulum deſcribere oporteat, cujus peripheria ſimul tranſeat per tria puncta A, B, C non in directum poſita.

Reſolutio.

Puncta A, B * B, C jungantur rectis AB, BC, quibus biſariam diviſis in *a*, *e* (a), ex ipſis punctis *a*, *e* erigantur perpendiculares *a*E, *e*G (b), ſeſe mutuo ſecantes in puncto *x*, quod erit centrum quæſiti circuli, nempe circulus deſcriptus ex puncto *x*, intervallo *x*A, tranſibit per tria puncta *A*, *B*, *C*. Fig. 11. T. XX.

Demonſtratio.

Ex puncto *x* ad tria ipſa puncta *A*, *B*, *C* ductæ intelligantur rectæ *xA*, *xB*, *xC*. Quoniam igitur recta *AB* ſecta eſt biſariam in *a* & recta *ax* eſt communis utrique triangulo *Aax*, *Bax*, duo hujuſmodi triangula habebunt duo latera duobus lateribus æqualia, alterum alteri. Eſt autem etiam angulus *Aax* æqualis angulo *Bax*; cum uterque ſit rectus (c). Ergo baſis *Ax* æquabit baſim *Bx* (d). Eodem modo oſtendam, rectam *x*C eſſe æqualem rectæ B*x*. Igitur rectæ *xA*, *x*B, *x*C ſunt æquales; ac proinde peripheria circuli deſcripti ex puncto *x*, intervallo unius ex illis rectis lineis, tranſibit per tria puncta A, B, C.

CO-

(a) §. 1.
(b) §. 12.
(c) Lib. III. §. 37.
(d) Lib. V. §. 71.

Digitized by Google

COROLLARIUM I.

32. Itaque per tria quæcunque puncta non in directum poſita tranſire poteſt peripheria circuli; atque hinc.

COROLLARIUM II.

33. Circa quodcunque triangulum planum rectilineum circulus deſcribi poteſt.

COROLLARIUM III.

34. Eodem modo invenitur centrum dati arcus circuli, ſeu datus circuli arcus perficitur. Satis namque eſt, ut determinatis tribus punctis in ipſo arcu, inveniatur centrum circuli, cujus peripheria per tria illa puncta incedat.

LEMMA I.

Omnis figura rectilinea æquilatera circulo inſcripta, eſt regularis.

35. Circulo ABCD inſcripta ſit figura rectilinea æquilatera ABCD. Dico, figuram rectilineam ABCD eſſe regularem.

Demonſtratio.

Quoniam ex hypotheſi latera AB, BC, CD ſunt æqualia, arcus quoque *AdB*, *BfC*, *CmD* erunt æquales (a); ac proinde totus arcus *AdeC* æquabit totum arcum *BfmD* (b). Igitur duo itidem anguli *ABC*, *BCD* ſunt æquales (c). Eodem modo oſtendentur æquales etiam duo *BCD*, *CDA*, atque

Fig. 14. T. XX.

(a) Lib. VIII. §. 38.
(b) Syn. Alg. §. 265.
(c) Lib. VIII. §. 73.

que ita deinceps. Rectilineum ergo *ABCD* eſt æquiangulum. Eſt autem etiam æquilaterum ex hypotheſi. Ergo eſt regulare (a). Omnis itaque figura &c. quod erat oſtendendum.

PROBLEMA VII.

Peripheriam circuli unico circini intervallo in duodecim æquales partes dividere.

36. Eſto peripheria circuli ABCD unico circini intervallo in duodecim æquales partes dividenda.

Reſolutio.

Ducantur diametri AC, BD ſeſe ad angulos rectos ſecantes in centro *a* (b); tum intervallo radii B*a*, ex puncto A ſecetur peripheria in punctis *d*, *x*; ex puncto B in punctis *b*, *f*; ex puncto C in punctis *e*, *n*; & ex puncto D in punctis *m*, *z*, eritque tota ipſa peripheria diviſa in duodecim partes æquales, prout quæſitum fuerat. Fig. 14. T. XX.

Demonſtratio.

Enimvero, cum ex conſtructione arcus BA, AD ſint æquales (c), ſicuti etiam arcus B*b*, D*z* (d), etiam reliquus *bA* reliquo *Az* erit æqualis (e). Totus autem *bz* eſt tertia pars ſemiperipheriæ BAD; cum uterque B*b*, D*z* ſit itidem una pars tertia ejuſdem (f). Ergo uterque arcus *bA*, *Az* erit una ſexta pars ſemiperipheriæ BAD, atque adeo una pars duodecima totius peripheriæ ABCD. Eodem modo idipſum demonſtrabitur de arcubus *d*B, B*e*, *f*C, C*m*, *n*D, D*x*. Igitur quilibet itidem reliquorum *bd*, *ef*, *mn*, *xz* erit una pars duodecima totius peripheriæ; quippe ſi æqualibus A*d*;

(a) Lib. V. §. 20.
(b) §. 13.
(c) Lib. III. §. 14.
(d) Lib. VII. §. 38.
(e) Synop. Algeb. §. 266.
(f) Lib. VII. §. 97.

Digitized by Google

ed demantur æquales *Be*, *Ab*, reliquus B*d* reliquo *dt* erit æqualis (g).

COROLLARIUM I.

37. Peracta diviſione peripheriæ circuli in duodecim partes æquales, ſola biſectione arcus habebitur diviſio peripheriæ circuli in partes 24, 48, 96 &c.

COROLLARIUM II.

38. Perſpicuum quoque eſt, quomodo *triangulum æquilaterum*, *quadratum*, *hexagonum*, *octogonum*, aliaque *polygona regularia* circulo inſcribi poſſint. Satis enim eſt, ut diviſa peripheria circuli in tot partes æquales, quot ſunt latera polygoni inſcribendi, horum arcuum chordæ ducantur. Ex præmiſſo ſiquidem Lemmate manifeſtum eſt, polygonum hinc factum eſſe regulare.

PROBLEMA VIII.

Ad datum punctum in peripheria circuli tangentem ducere.

39. In peripheria circuli AD datum ſit punctum A, ad quod rectam tangentem ducere oporteat.

Reſolutio.

Fig. 15. T. XX. Ducto radio CA, ex illius extremo, ſive ex dato puncto A erigatur perpendicularis AB (a), quæ erit tangens quæſita.

De-

(a) Syn. Alg. §. 266.
(b) §. 12.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Cùm enim angulus BAC ex conſtructione ſit rectus, tota ipſa recta AB extra circuli peripheriam cadit (a).

PROBLEMA IX.

Ex dato puncto extra circulum ducere rectam, quæ circulum ipſum tangat.

40. Ex puncto B poſito extra circulum *AD* ducere oporteat rectam, quæ circulum ipſum tangat.

Reſolutio.

Ex centro C ad datum punctum B ducatur recta CB, qua bifariam diviſa in *a* (b), centro a, intervallo partis dimidię *a*B, deſcribatur ſemicirculus *BAC* ſecans peripheriam circuli in puncto *A*. Recta B*A* ducta a puncto B ad punctum ſectionis *A*, erit tangens circulum. Fig. 15. T. XX.

Demonſtratio.

Rectus enim eſt angulus B*AC* (c), utpote in ſemicirculo conſiſtens.

(a) Lib. VII. §. 43.
(b) §. 1.
(c) Lib VII. §. 75.

LEMMA II.

Si recta linea ſecta fuerit extrema, & media ratione, triangulum iſoſceles, cujus baſis ſit æqualis majori ſegmento ipſius rectæ, utrumque autem latus totam ipſam rectam adęquet, habebit angulum ad baſim duplum anguli verticalis.

41. Recta AB ſecta ſit *media*, & *extrema ratione* in D.
Fig. 16. T. XX. Majus autem ipſius ſegmentum AD ſit æquale baſi BC trianguli iſoſcelis BAC, cujus utrumque latus AB, AC rectam ipſam AB adæquet. Dico, utrumque angulum ACB, ABC ad baſim duplum eſſe anguli verticalis BAC.

Demonſtratio.

Ducta ex puncto ſectionis D ad extremum C recta DC, per tria puncta A, D, C tranſeat peripheria circuli ADCE, quam tangat recta BC in puncto C. Quoniam igitur angulus BCD adæquat angulum CAB, ſeu CAD (a), ſi utrique adiiciatur angulus ACD, angulus BCA æqualis erit duobus angulis CAD, DCA ſimul ſumtis (b). Hos autem itidem adæquat angulus BDC (c). Ergo duo anguli ACB, BDC ſunt æquales (d); cumque angulus ABC ſit æqualis angulo ACB (e), etiam angulus ABC angulo BDC æqualis erit (f); duoque idcirco latera DC, BC erunt æqualia (g). Poſuimus autem rectam BC æqualem rectæ AD. Igitur recta AD æquabit rectam DC (h); & ideo duo anguli DAC, DCA erunt æquales (i). Conſtat porro, angulum BCA æquare duos angulos DCA, DAC, ut modo demonſtravimus. Ergo angulus BCA eſt duplus anguli BAC, atque adeo etiam angulus ABC, utpote ipſi BCA æqualis, duplus eſt anguli BAC. Itaque ſi recta linea &c. quod erat oſtendendum.

CO-

(a) Lib. VII. §. 33.
(b) Syn. Alg. §. 265.
(c) Lib. V. §. 50.
(d) Syn. Alg. §. 259.
(e) Lib. V. §. 60.
(f) Syn. Alg. § 262.
(g) Lib. V. §. 65.
(h) Syn. Alg. §. 261.
(i) Lib. V. §. 60.

COROLLARIUM I.

42. Cum tres anguli trianguli BAC valeant duos rectos (a), angulus BAC erit *quinta* pars duorum rectorum, atque adeo una pars *decima* quatuor rectorum. Quamobrem arcus B*d*C deſcriptus ex puncto A, intervallo totius rectæ AB, erit una pars *decima* peripheriæ circuli, cujus radius ſit ipſa recta AB (b).

COROLLARIUM II.

43. Hinc, *ſi radius circuli media, & extrema ratione ſecetur, majus ipſius ſegmentum erit chorda arcus, qui eſt pars decima peripheriæ totius circuli.*

PROBLEMA X.

Super datam rectam lineam pentagonum regulare deſcribere.

44. Pentagonum regulare conſtruendum ſit ſuper datam rectam AB.

Reſolutio.

Diviſa recta AB extrema, & media ratione in C (c), ipſi AB hinc inde in directum adiiciantur partes AG, BH æquales majori ſegmento AC. Tum ex punctis G, A, intervallo totius rectæ AB, deſcribantur duo arcus ſeſe mutuo ſecantes in puncto D, ſicuti etiam ex punctis B, H, eodem intervallo, duo arcus ſeſe mutuo ſecantes in F, & & ex punctis D, F, eodem intervallo, duo arcus, qui ſe mutuo dividant in puncto E. Hæc porro puncta A, D, E, F, B jungan- Fig. 17. T. XX.

(a) Ibidem §. 40.
(b) Lib. VII. §. 28.
(c) §. 18.

jungantur rectis AD, DE, EF, FB, eritque ſuper rectam AB deſcriptum pentagonum regulare EAB.

Demonſtratio.

Cum enim ſingula latera ipſius pentagoni ex conſtructione adæquent radium circuli, omnia erunt inter ſe æqualia (a). Igitur pentagonum EAB erit æquilaterum. Rurſus quoniam ex hypotheſi recta AB ſecta eſt *media, & extrema ratione* in C, ſitque DA = AB, & GA = AC, ducta recta DG, quæ rectæ DA erit æqualis (b), angulus DAG æquabit *duas quintas* partes duorum rectorum (c); ac proinde, cum duo anguli DAG, DA*B* valeant duos rectos (d), angulus DAB tribus quintis partibus duorum rectorum æqualis erit. Eodem modo oſtendam, augulum quoque FBA *tres quintas* partes duorum rectorum æquare. Igitur duo anguli DAB, F*B*A ſunt inter ſe æquales (e). Præterea, cum triangula iſoſcelia GDA, BFH ſint æqualia, & habeant æquales baſes GA, BH, eorum altitudines D*a*, F*b* erunt æquales (f), & quia ſunt parallelæ (g) recta DF ducta a puncto D ad punctum F, erit parallela rectæ GH (h). Anguli ergo alterni FDA, DAG erunt æquales (*i*); cumque angulus DAG adæquet *duas quintas* partes duorum rectorum (k), iiſdem itidem partibus angulus FDA æqualis erit. In triangulo autem iſoſcele D*AB* (ducta nimirum recta *DB*) duo anguli *AD*B, *ABD* ſunt æquales (l), treſque ipſius anguli valent duos rectos (m). Ergo, cum angulus *DAB*, ut modo vidimus, ſit æqualis *tribus quintis* partibus duorum rectorum, angulus *ADB*, ſicuti etiam angulus *ABD*, *unam quintam* partem duorum rectorum æquabit; rectaque idcirco D*A* angulum *AD*F biſariam dividet, & angulus DBF erit æqualis *duabus quintis* partibus duorum rectorum; cum totus *A*BF tres eorundem

quin-

(a) Syn. Alg. §. 259.
(b) Lib. VII. §. 10.
(c) §. 42.
(d) Lib. III. §. 40.
(e) Syn. Alg. §. 259.
(f) Lib. IX. §. 104.
(g) Lib. IV. §. 9.
(h) Lib. V. §. 58.
(i) Lib. IV. §. 15.
(k) §. 42.
(l) Lib V. §. 60.
(m) Ibidem §. 40.

Digitized by Google

quintas partes contineat. Igitur anguli DBF, FBH ſunt æquales (a). Conſtat autem, angulum DFB æqualem eſſe angulo alterno FBH (b). Ergo angulus DFB æquabit angulum DBF (c); ac proinde latus DF erit lateri DB æquale (d). Duo itaque triangula DEF, DAB ſunt ſibi mutuo æquilatera, adeoque æquiangula (e); eritque propterea angulus DEF æqualis angulo DAB; & angulus EDF angulo ADB. Angulus autem ADB eſt æqualis *uni quintæ* parti duorum rectorum. Ergo eandem partem angulus quoque EDF æquabit. Eidem porrò parti æqualis eſt etiam angulus FDB, utpote æqualis alterno DBA. Igitur angulus EDA continet *tres quintas* partes duorum rectorum; eſtque idcirco angulo DAB æqualis. Manifeſtum quoque eſt, angulum EF*B* æquare angulum FBA, cum angulus EFD adæquet angulum DBA, & angulus DF*B* angulum F*B*D, ut ſupra demonſtravimus. Ergo pentagonum EA*B* non tantum æquilaterum eſt, verum etiam æquiangulum; adeoque &c.

PROBLEMA XI.

Pentagonum regulare circulo inſcribere.

45. Pentagonum regulare circulo *ABD* inſcribere oporteat.

Reſolutio.

Radius AF dati circuli ſecetur *media*, & *extrema ratione* in puncto *x* (f); ſumtoque majori ſegmento *Ax*, ſecetur peripheria ipſius circuli ex puncto *A* in *b*; & ſumatur arcus *AB* duplus arcus *Ab*, chordaque ducatur *AB*, quæ erit latus pentagoni regularis *ABCDF* quæſiti. Fig. 18. T. XX.

De-

(a) Syn. Alg. §. 259.
(b) Lib. IV. §. 16.
(c) Syn. Alg. §. 461.
(d) Lib. V. §. 65.
(e) Ibid. §. 85.
(f) §. 18.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Cum enim arcus *Ab* ſit una *pars decima* peripheriæ circuli *ABD* (a), arcus *AB* erit una *pars quinta* ejuſdem. Quamobrem chordæ *AB*, *BC*, CD, DF, FA, utpote æqualibus arcubus ſubtenſæ, erunt æquales (b). Igitur pentagonum ACF erit æquilaterum; ac proinde regulare (c).

COROLLARIUM.

44 Manifeſtum eſt, quomodo peripheria circuli in quinque partes æquales dividi poſſit, atque hinc in partes 10, 20, 40, 80 &c. ſola arcus biſectione.

PROBLEMA XII.

Quindecagonum regulare circulo inſcribere.

47. Circulo ACD *quindecagonum* regulare inſcribere oporteat.

Reſolutio.

Aptetur circulo latus AD trianguli regularis (d), & latus AE pentagoni itidem regularis (e), ita nimirum ut idem punctum *A* ſit utrique commune. Tum arcus ED bifariam in puncto *e* dividatur (f). Chorda dimidii arcus *De* erit latus *quindecagoni* regularis circulo ACD inſcribendi.

Fig. 19. T. XX

Demonſtratio.

Facta namque hypotheſi, ut tota peripheria circuli *AB*D ſit = 15, arcus AED erit = 5, & arcus AE = 3; ac proinde

(a) §. 41.
(b) Lib. VII. §. 37.
(c) §. 35.
(d) §. 38.
(e) §. 45.
(f) §. 4.

Digitized by Google

inde AED—AE$=2$. Igitur illius pars dimidia *De* erit $= \frac{1}{15}$ integræ peripheriæ ipſius circuli; adeoque &c.

COROLLARIUM.

48. Patet idcirco, quomodo peripheria circuli dividi queat in 15 partes æquales; & hinc in partes 30, 60, 120 &c., arcus ſingulos biſecando.

PROBLEMA XIII.

Figuræ rectilineæ regulari circulum inſcribere.

49. Figuræ rectilineę regulari *ABD* circulum inſcribere oporteat.

Reſolutio.

Bifariam diviſis duobus lateribus *AB*, *BD* in punctis *b*, *c* (a), erigatur ex illis punctis rectæ perpendiculares *ba*, Fig. 19. *ca* (b). Punctum *a*, in quo illæ concurrunt, erit centrum T. XX. quæſiti circuli.

Demonſtratio.

Ex puncto *a* ad apices angulorum A, B, *D* ipſius figuræ ducantur rectæ *a*A, *aB*, *aD*. Quoniam igitur latera *Ab*, *bB* triangulorum A*ab*, *Bab* ex conſtructione ſunt æqualia, & latus *ab* eſt utrique triangulo commune, angulique A*ba*, *Bba*, utpote recti, ſunt æquales, baſes quoque *aA*, *aB* erunt æquales (c). Eadem ratione æquales erunt rectę *aB*, *aD*; ac proinde tres rectæ *aB*, *a*D, *aA* erunt inter ſe

(a) §. 1.
(b) §. 12.
(c) Lib. V. §. 73.

Digitized by Google

æquales. Æqualia ſunt autem etiam latera AB, BD, nempe baſes triangulorum A*aB*, *BaD* (a). Igitur duo triangula A*aB* *BaD*, utpote ſibi mutuo æquilatera, erunt æquiangula (b) adeoque ſimilia (c) eorumque idcirco altitudines *ab*, *ac* erunt *directe* inter ſe, ut baſes A*B*, *BD*, quæ ſunt latera ipſorum homologa (d); ac proinde erit *ab* = *ac*, quemadmodum eſt AB = BD (e). Eodem modo oſtendam eſſe *ac* = *ad*, atque ita de ceteris, ſi quæ fuerint. Circulus ergo deſcriptus ex puncto *a*, intervallo *ab*, tangit omnia latera figuræ A*B*D; adeoque &c.

COROLLARIUM I.

50. *Centrum itaque figuræ regularis rectilineæ diverſum non eſt a centro inſcripti circuli.* Demonſtravimus, cujus, rectas *a*A, *aB*, *a*D ductas a centro *a* inſcripti circuli *bcd* ad apices angulorum A, *B*, D figuræ rectilineæ regularis ABD, eſſe inter ſe æquales.

COROLLARIUM II.

51. Cum punctum *a*, in quo concurrunt rectæ *ab*, *ac* biſariam atque ad angulos rectos dividentes latera A*B*, *BD* figuræ A*BD*, ſit ejuſdem figuræ centrum, manifeſte apparet, quomodo centrum figuræ rectilineæ regularis inveniri poſſit.

COROLLARIUM III.

52. Invento centro figuræ rectilineæ regularis, habetur, quod requiritur, ut circulus ipſi figuræ circumſcribi poſſit; atque hinc patet, *centrum figuræ rectilineæ regularis idem eſſe cum centro circumſcripti circuli*.

PRO-

(a) Ibid. §. 20.
(b) Ibid. §. 85.
(c) Lib. IX. §. 66.
(d) Ibid. §. 78.
(e) Lib. I. §. 45.

Digitized by Google

PROBLEMA XIV.

Figuram rectilineam regularem circulo circumſcribere.

53. Circulo *cyur* quadratum circumſcribere oporteat.

Reſolutio.

Peripheria dati circuli dividatur in quatuor partes æquales *cy*, *yu*, *ur*, *rc*, in tot nempe, quot ſunt latera figuræ circumſcribendæ, atque ad ſingula puncta diviſionis ducantur radii *ac*, *ay*, *au*, *ar*, per quorum extrema agantur tangentes *BC*, *CD*, *DA*, *AB* (a), quæ conſtituent quadratum quæſitum *ABCD*. Fig. 14. T. XX.

Demonſtratio.

Ductis a centro *a* ad apices angulorum circumſcriptæ figuræ radiis *aA*, *aB*, *aC*, *aD*, cum duæ tangentes *cB*, *By* ſint æquales inter ſe (b), ſicuti etiam duæ *yC*, *Cu*, nec non duæ *ac*, *ay* (c), & latus *Ba* ſit commune utrique triangulo *caB*, *Bay*, duo hujuſmodi triangula, utpote æquilatera, erunt æquiangula (d), angulus nempe *caB* æquabit angulum *Bay*, & angulus *aBc* angulum *aBy*. Quamobrem angulus *cay* erit duplus anguli *Bay*, & angulus *cBy* anguli *aBy*. Eadem autem ratione etiam angulus *yau* eſt duplus anguli *yaC*, & angulus *yCu* anguli *yCa*. Ergo, cum duo anguli *cay*, *yau*, utpote æqualibus arcubus ex constructione inſiſtentes, ſint æquales (e), duo itidem anguli *Bay*, *yaC* erunt æquales (f). Sunt autem æquales etiam duo *ayB*, *ayC*, utpote recti. Ergo duo quoque *aBC*, *aCB* æquales erunt (g); atque adeo etiam duo *ABC*, *BCD* erunt æquales (h); cum, ut modo demonſtravimus, ſint in ra-

 tione

(a) §. 39.
(b) Lib. VII. §. 85.
(c) Ibidem. §. 10.
(d) Lib. V. §. 85.
(e) Lib. VII. § 27.
(f) Lib. I. §. 103.
(g) Lib V. §. 46.
(h) Lib. I. §. 103.

Digitized by Google

tione *dupla* ad æquales *aBC*, *aC*B, ſeu *a*B*y*, *y*C*a*. Eodem ratiocinio oſtendam, angulum BCD æquare angulum *CDA*, & angulum *CDA* eſſe æqualem angulo DAB; atque adeo figuram ABCD eſſe æquiangulam. Rurſus, cum duo anguli *a*BC, *a*CB oſtenſi ſint æquales, triangulum B*a*C erit iſoſceles (a); cumque recta *ay* baſi BC ad perpendiculum ex conſtructione inſiſtat, baſim ipſam BC bifariam dividet, nempe erit B*y*=*y*C (b). Eſt autem eadem ratione etiam C*u*=*u*D, & *y*C=C*u* (c). Ergo erit etiam BC=CD (d); eandemque ob cauſam CD=DA; atque ita de ceteris. Figura itaque ABCD eſt æquiangula, & æquilatera; ac proinde regularis, quod erat &c.

PROBLEMA XV.

Dato rectangulo æquale rectangulum ſuper datam rectam conſtruere.

54. Super rectam *nd* rectangulum conſtruere oporteat, quod ſit æquale dato rectangulo *afne*.

Reſolutio.

Lateri *fn* dati rectanguli adiiciatur data recta *nd* in directum. Tum directe producto latere *ae* in *b*, fiat *eb*=*nd*, ductaque recta *bd*, conſtructum ſit rectangulum *endb*, in quo ducatur diagonalis *bn* concurrens cum latere *af* in puncto *x*. Ex hoc autem puncto agatur recta *xz* parallela lateri *fd* (e), cui occurrant rectæ *en*, *bd* directe productæ in punctis *m*, *z*. Quadrilaterum *nmzd* erit rectangulum quæſitum.

Fig. 20. T. XX.

De-

(a) Lib. V. §. 25.
(b) Ibid. §. 78.
(c) Lib. VII. §. 85
(d) Lib. I. §. 127.
(e) §. 7.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Cum enim latera *ae*, *fn* rectanguli *afne* ſint parallela, rectæ quoque *ab*, *fd* erunt parallelæ; cumque poſitæ ſint æquales, æquales erunt etiam rectæ *af*, *bd*, & parallelæ (a); ac proinde quadrilaterum *afdb* erit parallelogrammum, & quidem rectangulum, ſicuti propterea etiam quadrilaterum *axzb*. Duorum autem parallelogrammorum *endb*, *fnmx* circa diametrum *xb* complementa ſunt *afne*, *nmzd*, quæ ſunt æqualia (b). Ergo rectangulum *nmzd* deſcriptum ſuper rectam *nd* adæquat rectangulum datum *afne*, adeoque &c.

PROBLEMA XVI.

Dato triangulo rectilineo æquale rectangulum ſuper datam rectam conſtruere.

55. Super datam rectam *nd* conſtruere oporteat rectangulum dato triangulo rectilineo ABC æquale.

Reſolutio.

Super rectam FN æqualem dimidiæ parti baſeos BC ipſius trianguli. & ſub eadem altitudine AF conſtruatur rectangulum AFNE (c), cui æquale fiat rectangulum *nmzd* ſuper datam rectam *nd* (d). Quadrilaterum *nmzd* erit rectangulum quæſitum. Fig. 21. Fig. 20. T. XX.

Demonſtratio.

Conſtat enim, rectangulum AFNE eſſe æquale dato triangulo ABC (e).

PRO-

(a) Lib. V. §§. 75. 88.
(b) Lib. XIV. §. 62.
(c) §. 26.
(d) §. 54.
(e) Lib. IX. § 97.

Digitized by Google

PROBLEMA XVII.

Dato polygono æquale rectangulum ſuper datam rectam conſtruere.

56. Super rectam *am* rectangulum conſtruere oporteat, quod ſit æquale polygono ABCE.

Reſolutio.

Diviſo polygono ABCE in tria triangula ACD, ADE, Fig. 21. ABC, ſuper rectam *am* fiat rectangulum *amnb* æquale triangulo Fig. 22. T. XX. ACD; ſuper latus *bn* rectangulum *bnxe* æquale triangulo ABC, & ſuper latus *ex* rectangulum *exzd* æquale triangulo ADE (a). Rectangulum *amzd* æquabit datum polygonum ABCE.

Demonſtratio.

Patet ex ipſa conſtructione.

COROLLARIUM.

57. Hinc facile dignoſci poteſt exceſſus unius figuræ re-Fig. 21. ctilineæ ſupra aliam, puta pentagoni ABCE ſupra trian-Fig. 22. Fig. 23. gulum ABC. Etenim conſtructo ſupra eandem rectam *am* T. XX. rectangulo *amzd*, quod ſit æquale pentagono ABCE, & rectangulo *amnb*, quod triangulum ABC adæquet, rectangulum *bnzd* erit exceſſus pentagoni ABCE ſupra triangulum ABC.

PRO-

(a) §. 55.

Digitized by Google

PROBLEMA XVIII.

Dato circulo æquale rectangulum ſuper datam rectam conſtruere.

58. Super rectam *mz* conſtruendum ſit rectangulum circulo ABC æquale.

Reſolutio.

Conſtruatur ſuper datam *mz* rectangulum *amzd* (a), quod ſit æquale rectangulo ED contento ſub radio EC Fig. 23. Fig. 24 ipſius circuli, & ſub recta CD æquali ejuſdem ſemiperi- T. XX. pheriæ ABC. Erit *amzd* rectangulum quæſitum.

Demonſtratio.

Manifeſtum quippe eſt, rectangulum ED æquare circulum ABC (b).

PROBLEMA XIX.

Dato rectangulo æquale quadratum conſtruere.

59. Quadratum conſtruere oporteat rectangulo ED æquale.

Reſolutio.

Inter ipſius rectanguli latera EC, CD inveniatur media geometrice proportionalis C*b* (c), quæ erit latus qua- Fig. 24. T. XX. drati quæſiti.

De-

(a) §. 54.
(b) Lib. X. §. 45.
(c) §. 22.

Digitized by Google

Demonſtratio.

Etenim, cum recta *Cb* ſit media proportionalis inter latera EC, CD, quadratum *ab* rectangulo ED erit æquale (a).

COROLLARIUM.

Fig. 21. T. XX. 60. Hinc figura quæcunque rectilinea a quadrato diverſa facili negotio in quadratum mutari poteſt. Id enim ex transformatione ipſius figuræ in rectangulum unice dependet. Sic triangulum ABC mutabitur in quadratum, ſi conſtructo rectangulo AFNE æquali triangulo ABC, fiat quadratum *ae* ipſi rectangulo æquale.

PROBLEMA XX.

Dato circulo æquale quadratum conſtruere.

61. Eſto circulus ABC, cui æquale quadratum conſtruere oporteat.

Reſolutio.

Fig. 24. T. XX. Inter radium EC, & rectam CD, quæ ſit æqualis ſemiperipheriæ ipſius circuli, inveniatur media geometrice proportionalis *Cb* (b). Hæc erit latus quadrati quæſiti.

Demonſtratio.

Quadratum quippe *ab* adæquat rectangulum ED (c); cui circulus ipſe eſt æqualis (d).

SCHO-

(a) Lib. IX. §. 111.
(b) §. 22.
(c) Lib. IX. §. 111.
(d) Lib. X. §. 45.

Digitized by Google

SCHOLION.

62. Eodem modo invenitur latus quadrati, quod ſit æquale dato cuilibet polygono regulari. Omne enim polygonum regulare adæquat rectangulum contentum ſub radio, & ſub illius ſemiperimetro (a).

PROBLEMA XXI.

Data figura plana, alteram illi ſimilem in data proportione deſcribere.

63. Deſcribere oporteat figuram rectilineam ſimilem figuræ ADC, ad quam ſe habeat, ut data quævis magnitudo *m* ad magnitudinem *n*.

Reſolutio.

Ducatur recta EF, ad quam latus quodcunque AB datæ figuræ eam habeat proportionem, quam habet magnitudo *m* ad magnitudinem *n* (b). Tum inter rectas AB, EF inveniatur media proportionalis *ab* (c), quæ erit latus figuræ quæſitæ. Fig. 10. T. XX.

Exemplum.

Ut ſi deſcribendum ſit pentagonum *duplum* pentagoni dati ADC, ponatur recta EF *dupla* rectæ, ſive lateris AB, & inveniatur inter eas media proportionalis *ab*, ſuper quam ſi conſtruatur pentagonum ſimile *adc* (d), illud erit *duplum* pentagoni ADC. Si vero conſtruere oporteat pentagonum in ratione *ſubdupla* ad pentagonum *adc*, ponatur recta *xz* Fig. 11. T. XX.

(a) Lib. IX. §. 30.
(b) §. 21.
(c) §. 22.
(d) §. 29.

ſubdupla lateris *ab*; tum inter rectas *ab*, *xz*, inveniatur media proportionalis AB. Pentagonum ADC ſuper ipſam AB conſtructum ſimile dato *adc*, erit *ſubduplum* ipſius *adc*.

Demonſtratio.

Patet ex §. 183. lib. IX.

S C H O L I O N.

64. Pro augendo, & imminuendo circulo, ratio diametri habenda eſt, ut ex §. 189. lib. IX. manifeſte deducitur. Pro ellipſi vero augenda, vel imminuenda, uterque ipſius axis diviſim ſpectari debet, prout ex §. 75. lib. XVI. aperte conſtat.

PROBLEMA XXII.

Datis duabus figuris rectilineis ſimilibus, alteram illis ſimul ſumtis æqualem deſcribere.

65. Deſcribere oporteat triangulum, quod ſit æquale duobus triangulis ſimilibus ABD, ACE ſimul ſumtis.

Reſolutio.

Fig. 25. T. XX. Latera ipſorum triangulorum homologa AB, AC jungantur ad angulum rectum BAC (a), eorumque extrema B, C jungantur recta BC, quæ erit latus homologum trianguli quæſiti.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex §. 184. lib. IX.

SCHO-

(a) §. 12.

SCHOLION I.

66. Eodem modo invenitur circulus duobus aliis ſimul ſumtis æqualis, ut patet ex §. 191. lib. IX. Pro ellipſibus vero, axes tam majores, quam minores datarum ellipſium ſeorſim ſimul jungi debent ad angulos rectos, ut axes homologi ellipſis, quæ ſit illis æqualis, inveniantur. Patet ex §. 76. lib. XVI.

SCHOLION II.

67. Hoc eodem artificio invenitur latus homologum figuræ rectilineæ, quæ non ſolum duabus ſimilibus, ſed pluribus etiam itidem ſimilibus ſimul ſumtis ſit æqualis. Ut ſi rectæ AB, AC, CD fuerint latera homologa trium figurarum rectilinearum ſimilium, invenitur latus figuræ, quæ omnes illas ſimul ſumtas adæquet, jungendo duo latera AC, AB ad angulum rectum CAB, & applicando alterum latus CD rectæ CB itidem ad rectum angulum BCD. Recta quippe BD eſt latus quæſitum, ut conſideranti perſpicuum fiet. Fig. 26. T.XX.

SECTIO III.

De ſolidis.

PORISMA.

Dato parametro, parabolam deſcribere.

68. Deſcribenda ſit parabola, cujus parameter ſit recta AC.

Reſolutio.

Fig. 27. T. XX. Ex uno extremo A datæ rectæ AC erigatur perpendicularis indefinita A*d* (a), in qua ſumantur quotcunque puncta *a*, *b*, *d*, atque ex his educantur perpendiculares *aE*, *b*F, *d*D illius magnitudinis, ut *a*E ſit media proportionalis inter parametrum AC, & abſciſſam A*a*, quemadmodum etiam recta *b*F inter parametrum AC, & abſciſſam A*b*, nec non recta *d*D inter eundem parametrum AC, & correſpondentem abſciſſam A*d* (b). Tum per puncta A, E, F, D ducatur curva AEFD, quæ erit parabolica quæſita.

Demonſtratio.

Patet ex natura parabolæ §. 165. lib. XV. explicata.

PROBLEMA I.

Inter duas rectas lineas invenire duas rectas continuo geometrice proportionales.

69. Inter duas rectas A*B*, BC invenire oporteat duas rectas continuo geometrice proportionales.

Reſolutio I.

Fig. 28. T. XX. Rectæ A*B*, BC jungantur ad angulum rectum ABC (c), & utraque verſus *x*, *n* indefinite producta, accipiantur duę normæ EDF, MNP, quæ ita rectis ipſis applicentur, ut apex *x* anguli normalis *nx*A ſit perpetuo in recta B*x*, ejuſque acies *xA* tranſeat per extremum A rectæ AB, apex vero *n* normalis anguli M*n*C ſit in recta B*n*, & illius latus *n*C per extremum C rectę BC continuo tranſeat, ut in figura

(a) §. 12.
(b) §. 22.
(c) §. 12.

Digitized by Google

figura conſpicitur. Duæ rectæ B*x*, B*n* erunt duæ mediæ continuo proportionales inter rectas *A*B, BC.

Demonſtratio.

Quandoquidem, cum in triangulo *nx*A angulus *nx*A ſit rectus, & linea *x*B ad perpendiculum rectæ *n*A incumbat (a), erit ∺ AB. B*x*. B*n* (b). Eſt autem haud diſſimili ratione ∺ B*x*. B*n*. BC. Ergo erit ∺ AB. B*x*. B*n*. BC.

Reſolutio II.

Duæ rectæ AB, *B*C jungantur ad angulum rectum ABC (c); ductaque recta AF parallela rectæ *B*C, & recta CF parallela rectæ AC (d), in rectangulo A*B*CF agatur diagonalis FB, qua biſariam diviſa in *a* (e), centro *a*, intervallo *a*F deſcribatur circulus AHCM, qui tranſibit per quatuor puncta A, B, C, F, cum duo oppoſiti anguli FAB, BCF ſint recti. Producto deinde latere AF in E, ita ut ſit AE=AB, deſcribatur parabola AMD, cujus axis ſit recta AB, & parameter recta AE (f). Ex puncto autem M, in quo curva parabolica AMD ſecat peripheriam circuli AHCM, agatur recta MH parallela lateri *B*C (g). Duæ rectæ M*b*, *b*A erunt duæ mediæ continuo geometrice proportionales inter rectas AB, *B*C, erit nempe ∺ A*B*. *b*M. *b*A. BC. Fig. 29. T. XX.

Demonſtratio.

Cum enim ſit AB = AE, erit AB×A*b*=AE×A*b*. Quadratum autem ſemiordinatæ *b*M adæquat rectangulum AE×A*b* (i). Ergo quadratum rectæ *b*M rectangulo quoque AB×A*b* erit æquale (*k*); ac proinde habebitur ∺ AB. *b*M. *b*A

(a) Lib. III. §. 52.
(b) Lib. IX. §. 74.
(c) §. 12.
(d) §. 7.
(e) §. 1.
(f) §. 68.
(g) §. 7.
(h) Lib. XV. §. 162.
(i) Syn. Alg. §. 261.
(l) Lib. IX. §. 118.

Digitized by Google

bA (a). Rurſus, cum rectangulum *A*B×*Ab*, utpote æquale rectangulo AE×A*b*, ſit æquale quadrato ſemiordinatæ *b*M (b), atque inſuper rectangulum *b*M×M*e* una cum rectangulo *b*M×*be* ſit æquale eidem quadrato rectæ *b*M (c), rectangulum *b*M×M*e* una cum rectangulo *b*M×*be* æquabit rectangulum AB×*Ab* (d). Conſtat autem, rectangulum *A*B×*Ab* æquare rectangulum B*b*×*b*A una cum quadrato rectæ A*b* (e). Ergo rectangulum quoque *b*M×M*e* una cum rectangulo *b*M×*be* æquabit rectangulum *b*B×*b*A una cum quadrato rectæ A*b* (f), cumque rectangulum *b*M×*b*H adæquet rectangulum *b*M×M*e* ob æqualitatem ſegmentorum *b*H, *e*M, rectangulum *b*M×*b*H una cum rectangulo *b*M×*be* æquabit rectangulum B*b*×*b*A una cum quadrato rectæ A*b*. Duo autem rectangula B*b*×*b*A, *b*M×*b*H ſunt æqualia (g). Ergo, his ſublatis, rectangulum *b*M×*be* erit æquale quadrato rectæ A*b* (h); atque adeo erit ∺ *b*M. *b*A. *be* (i); cumque ſit *B*C=*be*, erit quoque ∺ *b*M. *bA*. BC, & ideo ∺ BA. *b*M. *b*A. BC.

PROBLEMA II.

Pyramidem, & priſma in æquale parallelepipedum convertere.

I.

70. Parallelepipedum conſtruere oporteat, quod pyramidi ABCD ſit æquale.

Re-

(a) Lib. IX. §. 118.
(b) Lib. XV. §. 162.
(c) Ibidem § 144.
(d) Syn. Alg. §. 262.
(e) Lib. XV. §. 269.
(f) Syn. Alg. §. 262.
(g) Lib. IX. §. 148.
(h) Synop. Algeb. §. 266.
(i) Lib. IX §. 118.

Digitized by Google

Reſolutio.

Baſis *B*CD pyramidis mutetur in rectangulum *abd* (a), ſuper quod, veluti baſim, & ſub altitudine *ea*, quæ ſit tertia pars altitudinis datæ pyramidis, conſtruatur parallelepipedum *eabdm*. Parallelepipedum *eabdm* æquale erit pyramidi *A*BCD. Fig. 30 Fig. 31 T. XX.

Demonſtratio.

Patet ex §§. 29, 30 lib. XIII.

II.

71. Eſto priſma AD transformandum in parallelepipedum.

Reſolutio.

Fiat rectangulum *abd* æquale baſi BCD ipſius primatis (b). Tum ſuper ipſum rectangulum *abd*, & ſub eadem altitudine conſtruatur parallelepipedum *nd*. Erit *nd* parallelepipedum quæſitum. Fig. 32. Fig. 31. T. XX.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex §. 35. lib. XIII. ,cum parallelepipedum ſit ſpecies priſmatis (c).

COROLLARIUM.

72. Cum conus ſit pyramis infinitangula (d), & cylindrus

(a) §§. 55. 34.
(b) §§. 55. 36.
(c) Lib. XI. §. 23.
(d) Ibidem §. 72.

Digitized by Google

drus ſit ſpecies priſmatis (a), manifeſte conſtat, quomodo utrumque hujuſmodi ſolidum in parallelepipedum mutari queat.

PROBLEMA III.

Sphæram in parallelepipedum mutare.

73. Conſtruendum ſit parallelepipedum, quod ſit æquale datæ ſphæræ ABCD.

Reſolutio.

Fig. 33. Fig. 34. T. XX. Deſcribatur quadratum CEF æquale maximo ipſius ſphæræ circulo (b), ſuper quod, veluti baſim, & ſub recta MC, quæ *duos trientes* diametri AC contineat, conſtruatur parallelepipedum MF, quod erit ipſi ſphæræ æquale.

Demonſtratio.

Parallelepipedum MF adæquat cylindrum (c), cujus baſeos circulus ſit æqualis quadrato CEF, & eadem utriuſque altitudo (Duo enim hujuſmodi ſolida ſpectari poſſunt, veluti duo priſmata æqualium baſium, & altitudinum). Sphæra autem ABCD eſt hujuſmodi cylindro æqualis (d). Ergo ſphæra ABCD parallelepipedum quoque MF æquabit (e).

PRO-

(a) Ibid. §. 70.
(b) §. 61.
(c) Lib. XIII. §. 35.
(d) Lib. XIV. §. 108.
(e) Syn. Alg. §. 261.

Digitized by Google

PROBLEMA IV.

Superficiei ſphæræ, & ſphæroidis æqualem circulum deſcribere.

I.

74. Circulum deſcribere oporteat, cujus area adæquet ſuperficiem ſphæræ NMR.

Reſolutio.

Deſcribatur circulus, cujus radius ſit diameter NR datæ ſphæræ. Hujus circuli area æquabit ſuperficiem datæ ſphæræ NMR. Fig. 27. T. XIX.

Demonſtratio.

Evidens eſt ex §. 73. lib. XIV.

II.

75. Eſto ſphærois lata ADBG genita ex revolutione ſemiellipſis CAD circa minorem ipſius axim CD. Deſcribere oporteat circulum, cujus area ſuperficiei hujuſce ſphæroidis ſit æqualis. Fig. 21. T. XIX.

Reſolutio.

Recta *ab* ſit æqualis majori axi AB ellipſis generatricis, & recta *cd* axi ipſius minori CD. Inter rectas autem *ab*, *cd* inveniatur media arithmetice proportionalis *xy* (a); tum inter primam *ab* ipſamque *xy* media geometrice pro- Fig. 24. T. XIX.

(a) Lib. I. §. 199.

Digitized by Google

portionalis *ef* (a). Hæc erit radius circuli, cujus area ſuperficiem ipſis ſphæroidis ADBC æquabit.

Demonſtratio.

Manifeſta eſt ex §. 131. lib. XVI.

I I I.

Fig. 26. T.XIX. 76. Invenire modo oporteat radium circuli, cujus area adæquet ſuperficiem ſphæroidis oblongæ ACBD genitæ ex revolutione ſemiellipſis ACB circa majorem ipſius axim AB.

Reſolutio.

Fig. 24. T.XIX. Poſitis, ut ſupra, duabus rectis *ab*, *cd*, quarum *ab* majori axi AB, & *cd* minori axi CD ſit ęqualis, atque inter ipſas *ab*, *cd* reperta media arithmetice proportionali *xy* (b), inter rectam *xy*, & rectam *cd* inveniatur media geometrice proportionalis *ur* (c), quæ erit radius circuli quæſiti. Quippe illius area ſuperficiem oblongæ ſphæroidis *ACBD* æquabit.

Demonſtratio.

Patet ex §. 132. lib. XVI.

S C H O L I O N I I.

77. Invento circulo, cujus area ſuperficiem ſphæræ, aut ſphæroidis adæquet, facile erit ex §. 61. quadratum conſtruere, cujus area ſit eidem ſuperficiei æqualis.

PRO-

(a) §. 22.
(b) Lib. I. §. 199.
(c) §. 22.

Digitized by Google

PROBLEMA V.

Sphæroidem in ſphæram mutare.

I.

78. Eſto ſphærois lata CADB genita ex revolutione ellipſis CADB circa minorem axim CD, quam in ſphæram mutare oporteat.

Reſolutio.

Ponatur recta *ab* æquali majori axi A*B*, & recta *cd* æquali axi minori CD ellipſeos generatricis. Tum inter rectas *ab*, *cd* inveniantur duæ mediæ continuo proportionales *mn*, *ze* (a). Recta *mn* prima illarum duarum mediarum poſt majorem axim *ab* erit diameter ſphæræ quæſitæ, ſphæra nimirum *amn*, cujus diameter ſit recta *mn* æquabit ſphæroidem CADB. Fig. 21. Fig. 25. Fig. 23. T. XIX.

Demonſtratio.

Patet ex §. 127. lib. XVI.

II.

79. Eſto modo ſphærois oblonga ACBD in ſphæram tranſmutanda.

(a) §. 69.

Reſolutio.

Fig. 26. Fig. 25. Fig. 28. T. XIX. Inventis, ut ſupra, duabus mediis *mn*, *ze* continuo proportionalibus inter rectas *ab*, *cd* æquales axibus ellipſis generatricis, prima *ze* poſt axim minorem *cd* erit diameter quæſitæ ſphæræ. Ut ſi diameter ſphæræ *zxe* fuerit recta *ze*, ſphæra *zxe* erit æqualis ſphæroidi AC*B*D.

Demonſtratio.

Patet ex §. 128. lib. XVI.

SCHOLION.

80. Peracta transformatione ſphæroidis in ſphæram, facile erit ex III. Problemate, ſphæroidem in parallelepipedum mutare.

PROBLEMA VI.

Dato parellelepipedo cubum æqualem conſtruere.

81. Cubum conſtruere oporteat, qui ſit æqualis parallelepipedo A D.

Reſolutio.

Fig. 37. Fig. 38. Fig. 39. Fig. 36. T. XX. Si baſis *B*CD dati parallelepipedi AD non eſt quadrata, fiat quadratum *B*EF illi æquale (a), ſuper quod conſtructum ſit parallelepipedum AF ejuſdem altitudinis AB. Tum poſita recta $a = $ BE, & recta $d = $ A*B*, inter duas *a*, *d* inveniantur duæ mediæ continuo proportionales

(a) § 56.

Digitized by Google

les b, c (a). Harum prima b erit latus cubi quæſiti, cubus nimirum ad, cujus latus be ſit æquale rectæ b, æquabit parallelepipedum AD.

Demonſtratio.

Quoniam quatuor rectæ a, b, c, d poſitæ ſunt continuo proportionales, erit $a.\ c = b.\ d$. Quadratum autem, ſive baſis BEF parallelepipedi AF eſt ad quadratum bed baſis parallelepipedi ad, ut prima a ad tertiam c (b), cum poſitum fuerit $BE = a$, $be = b$. Ergo baſis BEF parallelepipedi AF erit quoque ad baſim bed parallelepipedi ad, ut ſecunda b ad quartam d (c). Conſtat autem, altitudinem ab cubi ad eſſe ad altitudinem AB parallelepipedi AF, ut recta itidem b ad rectam d, ex eo nimirum quod ſit $ab = b$, & $AB = d$ per conſtructionem. Ergo duo parallelepipeda AF, ad reciprocant ſibi mutuo baſes, & altitudines; atque adeo ſunt inter ſe æqualia (d). Parallelepipedum porro AF adæquat parallelepipedum AD (e), utpote ejuſdem cum illo baſis, & altitudinis. Igitur cubus ad parallelepipedo quoque AD eſt æqualis (f) adeoque &c.

SCHOLION I.

82. Cum ex hactenus traditis notum ſit artificium mutandi pyramidem, conum, priſma, cylindrum, ſphæram, & ſphæroidem in parallelepipedum, perſpicuum remanet, quomodo hujuſmodi ſolida in cubum transformari queant.

PROBLEMA VII.

Dato ſolido, invenire latus homologum ſolidi ſimilis, quod determinatam ad illud rationem habeat.

83. Eſto nd ſolidum datum. Invenire autem oporteat latus

(a) §. 69. (b) Lib. IX. § 183. (c) Lib I. § 78. (d) Lib. XIII. §. 60. (c) Ibid. §. 36. (f) Syn. Alg. §. 262.

latus homologum ſolidi ſimilis , ad quod datum ipſum ſolidum *nd* ſit, ut *m* ad *n*.

Reſolutio.

Fig. 31. Poſita recta *a* æquali lateri *ab*, ducatur recta *d*, ad
Fig. 35. T. XX. quam recta *a* ſit, ut *m* ad *n*. Inter rectas autem *a*, *d* inveniantur duę mediæ continuo proportionales *b*, *c* (a). Recta *b* erit latus ſolidi quæſitum.

Exemplum.

Conſtruere oporteat cubum, ad quem cubus *nd* ſit in
Fig. 34. ratione *ſeſquialtera*. Poſita itaque recta $a = ab$, & recta $d = \frac{2a}{3}$, inter duas *a*, *d* inveniantur duæ mediæ continno proportionales *b*, *c*, quarum prima *b* ſit latus cubi MF Erit MF cubus quæſitus.

Demonſtratio.

Evidens eſt ex §. 137. lib. XIII.

SCHOLION I.

84. Eodem modo invenitur diameter ſphæræ, quæ determinatam habeat rationem ad ſphęram datam. Patet ex §. 161. lib. XIII. Pro ſphęroide vero hæc ipſa eadem operatio perficienda eſt penes utrumque axim ellipſis generatricis, ut ex §. 150. lib. XVI. manifeſte colligitur. Eodem modo ratiocinare de conis, & cylindris, videlicet rationem habendam eſſe tum diametrorum baſium, tum altitudinum.

SCHO-

(a) §. 69.

SCHOLION II.

85. Itaque per inventionem duarum mediarum continuo geometrice inter duas datas rectas lineas proportionalium ſolvitur celeberrimum de cubi duplicatione Deliacum problema, quod priſcorum ingenia adeo torſit. Hanc porro viam, quam primus omnium invenit Hippocrates Chius, omnes poſtea Geometræ amplexati ſunt, ſummiſque laudibus exornarunt, utpote, quemadmodum advertit vir Cl. Andreas Tacquet, plane unicam, & ſingularem.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Digitized by Google